



하이브리드 파워흐름해석법을 이용한 동일 평면상에서 연성된 평판의 횡진동 해석 연구

An Investigation on the Flexural Vibration of Coupled Co-planar Plates by Using Hybrid Power Flow Analysis

강 현 영* · 유 정 수† · 김 기 선**

Hyunyoung Kang*, Jungsoo Ryue† and Ki-Sun Kim**

(Received March 21, 2019 ; Revised May 9, 2019 ; Accepted May 9, 2019)

Key Words : Power Flow Analysis(파워흐름해석), Hybrid Method(하이브리드 방법), Coupled Plates(연성 평판)

ABSTRACT

The finite element method (FEM) and the statistical energy analysis (SEA) are widely used in the numerical analyses of structural vibrations. However, these two methods are limited in that they cannot be applied at high frequencies. In order to overcome this problem, an alternative approach, called energy finite element analysis (EFEA) has been proposed, which is based on power flow analysis (PFA). Because EFEA is the numerical version of a PFA, it is necessary to validate PFA for various structures in order to understand the features of an EFEA. In this study, two different solving approaches (Levy-type and hybrid approaches) of the PFA method are investigated for coupled plates. The predicted results are validated by a comparison with those obtained using the plate theory.

1. 서 론

선박과 같이 복잡한 대형 구조물의 진동소음 해석 문제는 이론적 접근이 어렵기 때문에 다양한 수치해석 방법들이 사용되어왔다. 그 중 가장 널리 사용되는 대표적인 방법이 유한요소법(finite element method, FEM)이다. 하지만 고주파수 진동 혹은 소음 해석과 같이 해석 주파수 대역이 높아지면 FEM은 요소 개수의 증가로 인해 연산 용량 증대와 계산 시간이 길어지는 문제점을 갖는다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 고주파수 대역 진동 해석에 통계에너지해석법(sta-

tistical energy analysis, SEA)이 도입되었다. 그러나 통계에너지해석법은 모드 밀도 조건을 충족시키기 위해 요소를 크게 모델링해야 하며 해석결과로 요소의 평균 응답만을 얻게 되므로 구조물의 국부적인 진동 응답을 구할 수 없다. 또한 FE 모델을 사용할 수 없으므로 구조물에 대한 별도의 SEA 모델링이 수반되어야 하는 빈거로움이 존재한다.

두 해석법의 단점을 보완할 수 있는 대안으로서 에너지 유한요소해석(energy finite element analysis, EFEA)이 시도되고 있다. 이 방법은 파워흐름해석(power flow analysis, PFA)을 기반으로 하는 유한요소방법으로, 중 고주파수 대역 해석에 적합하고 기존의 유한요소 해석

† Corresponding Author ; Member, School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan
E-mail : jsryue@ulsan.ac.kr

* Naval Ship Research Department, Hyundai Heavy Industry

** Dynamics Research Department, Hyundai Heavy Industry

A part of this paper was presented at the KSNVE 2018 Annual Autumn Conference.

‡ Recommended by Editor Won Ju Jeon

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

모델을 활용할 수 있으며 국부적인 진동해석이 가능하다. EFEA는 파워흐름해석에 기반한 수치 방법이므로 EFEA의 사용에 앞서 파워흐름해석에 대한 이해 및 연구가 우선적으로 필요하다.

Belov et al.⁽¹⁾은 열에너지가 전도되는 형태와 유사하게 진동 에너지가 계산된다고 제안하였으며, 이로부터 파워흐름해석에 대한 연구가 시작되었다. 파워흐름해석은 파동 방법을 이용한 진동 에너지의 흐름을 해석하므로 진동 성분 중 원거리 해를 취하여 계산하며⁽²⁾, 중고주파수 대역에서 유용하게 사용될 수 있다는 특징이 있다.

이후 이 방법론은 power flow⁽¹⁾, energy flow⁽³⁾, vibrational power flow⁽⁴⁾ 등의 다양한 이름으로 불리어 왔다. Bernhard와 Wohlever^(5,6)는 일차원 구조물인 봉과 보에 대하여 파워흐름해석을 처음으로 적용하였고, Nefske와 Sung⁽⁷⁾은 파워흐름해석에 유한요소모델링을 도입한 PFEEA(power flow finite element analysis) 수치기법을 제안하고 보에 적용하였다.

Bernhard와 Bouthier^(3,8)는 박막과 판의 횡진동에 대한 에너지 지배방정식을 유도하여 적용함으로써 파워흐름해석을 이차원 영역으로 확장시켰다. Kim et al.⁽⁹⁾은 원판에 대하여 파워흐름해석을 수행하였고, Park et al.⁽¹⁰⁾은 평판의 종 방향 및 전단 방향 진동에 대하여 파워흐름해석을 수행하였다. 평판의 횡진동에 대한 파워흐름해석방법으로서 단일 평판의 경우 평면파 방법⁽¹¹⁾, Levy-type 방법 그리고 하이브리드 방법⁽¹²⁾ 등이 연구되었다. 연성 평판의 경우에는 Levy-type 방법⁽¹³⁻¹⁵⁾을 적용한 연구가 진행되었다. Vlahopoulos et al.⁽¹⁶⁻¹⁸⁾은 평판에 대한 파워흐름해석 수치기법을 연구하여 상용 EFEA 프로그램 개발에 집중해오고 있다.

이 연구에서는 동일 평면상에서 연성된 평판 구조물의 횡진동 해석에 파워흐름해석의 두 방법인 Levy-type 방법과 하이브리드 방법을 적용하고 그 결과를 판 이론해석 결과와 비교함으로써 두 방법의 신뢰성을 비교하였다. Levy-type 방법을 이용한 해석 결과는 판 이론해석 결과와 비교해 가진점 부근에서는 낮게, 그 외 영역에서는 높게 예측되고 있다. 하이브리드 방법은 구조물의 진동을 직접장(direct field)과 잔향장(reverberant field)으로 나누어 해석하는 방법이다. 단일 평판에 대한 하이브리드 방법 적용 사례는 보고된 바 있으나 연성 평판에 대해서는 적용된 바가 없다. 따라서 이 논문에서는 연성된 평판에 하이브리드 방법을 적

용하기 위한 방안을 제시하고 이를 이용해 연성된 직사각형 평판의 진동 에너지를 해석하였다. 이 연구를 통해, 연성된 두 평판의 횡진동 해석 시, 하이브리드 방법이 Levy-type 방법보다 이론 해석결과에 더 부합함을 확인하였다.

2. 동일 평면상에서 연성된 평판의 파워흐름해석

Fig. 1에는 이 해석에 사용한 연성 평판 모델을 나타내었다. 두 사각 평판 plate 1과 plate 2는 한 모서리를 공유하면서 연성되어 있으며, 외력은 plate 1의 (x_0, y_0) 지점에 작용한다. 두 평판은 두께를 제외한 모든 물성과 재원이 동일하다고 가정하였으며, 두 평판이 연결된 모서리를 제외한 다른 모서리는 단순지지 경계조건을 부여하였다. 두 평판의 물성치와 재원은 Table 1에 정리하였다.

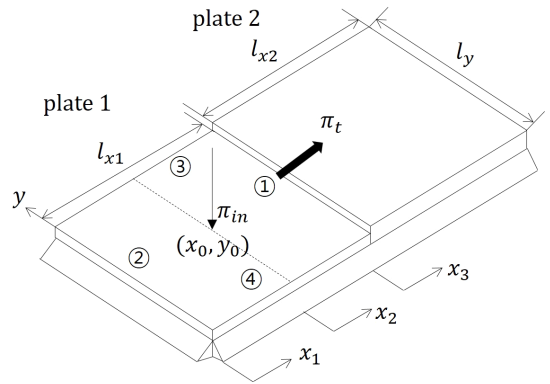


Fig. 1 Coupled plate model composed of plate 1 and plate 2

Table 1 Properties and dimensions of coupled plates

Force (F, N)	1
Young's modulus (E, GPa)	200
Density ($\rho, kg/m^3$)	8000
Poisson's ratio (ν)	0.3
Loss factor (η)	0.1
Plate 1 length (l_{x1}, m)	1
Plate 2 length (l_{x2}, m)	1
Plate width (l_y, m)	1
Thickness 1 (h_1, m)	0.001
Thickness 2 (h_2, m)	0.002

2.1 Levy-type 방법

Levy-type 방법을 이용한 파워흐름해석에서는 y (또는 x)방향의 에너지 밀도는 평면파(모드)로 표현하고 x (또는 y)방향의 에너지 밀도는 진행하는 파동으로 표현한다. Fig. 1의 평판 모델에서는 진동 에너지가 plate 1에서 plate 2로 전달되어야 하므로, y 방향의 모드를 가진 진동에너지가 x 방향으로 진행한다고 모델링한다. 따라서 가진점을 기준으로 plate 1을 두 영역으로 분할하여 각각 x_1, x_2 좌표로 정의한다. Plate 2에는 외력 또는 제원의 불연속이 없으므로 한 개 영역으로 표현한다.

Levy-type 방법에서 시간과 공간에 대해 평균된 평판의 에너지 밀도는

$$\langle \bar{e}_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e_{i,n}(x_i) \cos(k_n y), \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

로 표현하며, n 이 증가할수록 파동 및 모드 수가 증가하면서 에너지 밀도는 특정 값에 수렴하게 된다. 여기서 하첨자 i 는 연성 평판의 분할 영역을 나타내며 plate 1이 두 개 영역, plate 2가 한 개 영역을 가지므로 $i=1, 2, 3$ 이 된다. $\langle \rangle$ 는 시간에 대한 평균을, $\bar{}$ 는 공간에 대한 평균을 나타내며, n 은 y 방향 모드의 차수, k_n 은 y 방향 모드의 파수(wavenumber)로서 $k_n = n\pi/l_y$ 이고, $e_{i,n}(x_i)$ 은 i 영역에서 n 번째 모드의 x 방향 에너지 밀도를 나타내는 함수이다. 각 영역에는 양의 x 방향과 음의 x 방향으로 진행하는 두 개의 에너지 흐름이 있으므로

$$e_{i,n}(x_i) = e_{i,n}^+(x_i) + e_{i,n}^-(x_i) \quad (2)$$

으로 표현하고, 각 방향의 에너지 밀도는 지수함수를 이용해

$$e_{i,n}^+(x_i) = A_{i,n}^+ e^{-\gamma_{i,n} x_i} \quad (3)$$

$$e_{i,n}^-(x_i) = A_{i,n}^- e^{\gamma_{i,n} x_i} \quad (4)$$

로 정의한다. 여기서 $A_{i,n}$ 은 n 번째 모드의 크기를 나타내는 계수이다.

에너지 지배방정식은(8)

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle + \eta\omega \langle \bar{e} \rangle = \langle \bar{\pi}_{in} \rangle \quad (5)$$

이고 여기서 $\bar{\pi}_{in}$ 은 구조물에 유입되는 파워이다. 식(1)

은 식(5)의 우변이 0인 제차식에 대한 해이므로, $\gamma_{i,n}$ 를 구하기 위해 식(1)~식(4)를 에너지 지배방정식에 대입하면

$$-\frac{c_{g,i}^2}{\eta_i\omega} \langle \bar{e}_i \rangle (\gamma_{i,n}^2 - k_n^2) + \eta_i\omega \langle \bar{e}_i \rangle = 0 \quad (6)$$

를 얻는다. 여기서 $c_{g,i}$ 는 군속도, η_i 는 감쇠계수, ω 는 가진주파수이다. 식(6)으로부터

$$\gamma_{i,n}^2 - k_n^2 = \mu_i^2 \quad (7)$$

의 관계식을 얻는다. 여기서 $\mu_i = \eta_i\omega/c_{g,i}$ 이다.

에너지 밀도와 동일한 방식으로 x 방향에 대한 인텐시티는

$$\langle \bar{I}_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} I_{i,n}(x_i) \cos(k_n y) \quad (8)$$

로 쓸 수 있고, 여기서

$$I_{i,n}(x_i) = I_{i,n}^+(x_i) - I_{i,n}^-(x_i) \quad (9)$$

$$I_{i,n}^+(x_i) = \frac{c_{g,i}^2}{\eta_i\omega} \lambda_{i,n} e_{i,n}^+(x_i) \quad (10)$$

$$I_{i,n}^-(x_i) = \frac{c_{g,i}^2}{\eta_i\omega} \lambda_{i,n} e_{i,n}^-(x_i) \quad (11)$$

이다.

가진점(x_0, y_0)에 유입되는 입력 파워(π_{in})도 에너지 밀도와 동일하게 y 방향에 대해 cosine 함수로 나타내면 식(12)와 같다.

$$\pi_{in} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(x) \cos(k_n y) \quad (12)$$

식(12)의 양변에 $\cos(k_n y)$ 를 곱한 후 y 에 대해 적분하면 cosine 함수의 직교성을 이용해 $\pi_n(x)$ 를 식(13)과 같이 얻을 수 있다.

$$\pi_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi_{in}}{l_y} \delta(x-x_0) & (n=0) \\ 2\pi_{in} \cos k_n y_0 \delta(x-x_0) & (n \neq 0) \end{cases} \quad (13)$$

에너지 밀도를 구하기 위해서는 식(3)과 식(4)의 미지계수 $A_{i,n}^+, A_{i,n}^-$ 을 구해야 한다. Fig. 1의 평판 모

델은 가진점과 결합부를 기준으로 세 영역으로 분할되어 있으므로 총 6개의 계수를 구해야 한다. 따라서 적용해야 할 경계조건과 연속조건 역시 6개가 필요하다. 단순지지 경계조건이 적용된 평판의 모서리에서는 외부로 유출되는 파워가 없다고 가정하면

$$\langle \bar{I}_{1x} \rangle(0,y) = 0 \tag{14}$$

$$\langle \bar{I}_{3x} \rangle(l_{x2},y) = 0 \tag{15}$$

의 경계조건을 갖는다. 그리고 가진점 ($x = x_0$)에서 두 평판의 에너지 밀도가 동일해야 하고 유입유출파위의 평형이 만족되어야 하므로 두 개의 연속조건

$$\langle \bar{e}_1 \rangle(x_0,y) = \langle \bar{e}_2 \rangle(0,y) \tag{16}$$

$$\langle \bar{I}_1 \rangle(x_0,y) + \pi_{in}\delta(y-y_0) = \langle \bar{I}_2 \rangle(0,y) \tag{17}$$

을 얻는다. 또한 두 판의 결합부($x_2 = l_{x1} - x_0$ 또는 $x_3 = 0$)에서는 파워의 투과와 반사가 발생하므로 파워의 보존식이 적용되어야 한다. Levy-type 방법에서는 진동 에너지가 x 축에 평행하게 진행하므로 두 판이 결합된 모서리에 수직하게 파워의 반사와 투과가 발생한다. 따라서, plate 1과 plate 2 결합부의 파워투과계수 (T)와 파워반사계수(Γ)를 이용해 표현한 파워 평형은

$$\begin{aligned} I_{2n}^-(l_{x1} - x_0,y) \\ = \Gamma_{22} I_{2n}^+(l_{x1} - x_0,y) + T_{32} I_{3n}^-(0,y) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} I_{3n}^+(0,y) \\ = \Gamma_{33} I_{3n}^-(0,y) + T_{23} I_{2n}^+(l_{x1} - x_0,y) \end{aligned} \tag{19}$$

이 된다. 여기서 T 와 Γ 의 첫 번째 하첨자는 입사되는 영역을, 두 번째 하첨자는 에너지가 투과 또는 반사되는 영역을 각각 나타낸다. 이상의 여섯 조건으로 여섯 개의 미지 계수를 구하면 연결된 직사각형 평판에 대한 에너지 밀도를 계산해 낼 수 있다.

Levy-type 방법에서는 한 방향(Fig. 1의 x 방향)에 대한 에너지 투과 및 반사만 고려할 수 있기 때문에 x 와 y 방향 모두 연결된 평판의 진동 에너지를 해석할 수 없다는 단점을 갖는다.

2.2 하이브리드 방법

하이브리드 방법은 평판의 진동 에너지를 직접장과 잔향장으로 나누어 해석하는 방법이다. 직접장에서는 평판의 경계에 의한 에너지 반사를 무시하고 무한 평

판으로 가정하여 가진력에 의해 발생하는 에너지 밀도를 계산한다. 따라서, 직접장의 입력 파워는 외력에 의해 발생한다. 반면, 잔향장은 직접장의 에너지가 구조물의 경계에서 반사되어 형성된다고 가정한다. 따라서, 잔향장의 에너지 수준은 직접장의 반사 파워에 의해 결정된다. Plate 1에는 외력이 작용하므로 직접장 해석이 가능한 반면 plate 2에는 외력이 존재하지 않아 직접장을 정의하기 쉽지 않다. 따라서 먼저 plate 1에 대해 해석하면서 하이브리드 방법의 개념을 소개한다. Fig. 2에는 외력에 의해 plate 1에 형성되는 직접장과 경계에서 발생하는 반사에 의한 잔향장의 인텐시티를 나타내었다. 이어서 plate 2에 직접장을 구성하기 위해 이 연구에서 도입한 가정과 정식화에 대해 기술한다.

(1) Plate 1의 직접장

가진점을 기준으로 발생하는 직접장에 대한 에너지 밀도는 plate 1을 무한 평판으로 가정하여 계산한다. 무한 평판에서 에너지 밀도는 원주 방향으로 대칭성을 가지므로 극좌표계로 표현하면

$$\langle e_{d1} \rangle = \frac{A}{r} e^{-\mu_1 r} \tag{20}$$

여기서 하첨자 d 는 직접장을 의미하며, r 은 가진점으로부터의 반경이다. 에너지 밀도와 인텐시티의 관계는

$$\langle \vec{I}_{d1} \rangle = c_{g1} \langle e_{d1} \rangle \mathbf{r} \tag{21}$$

이고, \mathbf{r} 은 전파 방향의 단위 벡터이다. 무한 평판에서 가진점에 유입되는 입력 파워와 인텐시티의 관계는

$$\pi_{in} = \left(\lim_{r_0 \rightarrow 0} 2\pi r_0 \right) \langle \vec{I}_{d1} \rangle \tag{22}$$

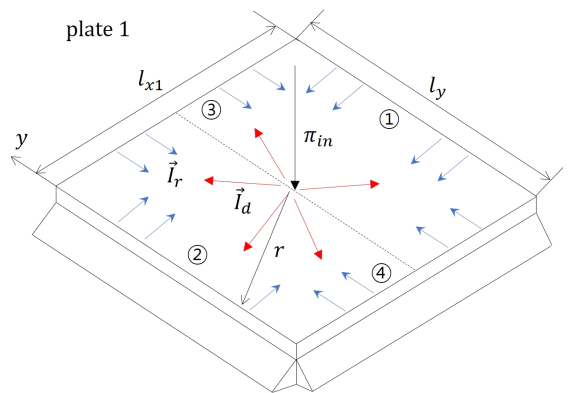


Fig. 2 Plate 1 part which is forced in coupled plate

이다. 여기서 r_0 는 가진점 근방의 미소반경이다. 식 (22)를 이용하여 A 를 구할 수 있으므로 식 (20)을 계산할 수 있지만 $r = 0$ 에서 에너지 밀도는 발산한다는 것을 알 수 있다. 따라서 발산 문제를 피하기 위해 가진점 근방의 거리 $r = 0$ 에 대하여 $r < r_0$ 인 구간에서는 에너지 밀도가 일정한 값(e_0)이 되도록 제한한다. e_0 의 계산 과정은 다음과 같다.

무한 평판에서 가진점에서의 속도(v_0)는

$$v_0 = F_0 / 8 \sqrt{D\rho h_1} \tag{23}$$

로 정의할 수 있다. 여기서 F_0 는 외력의 크기, D 는 판의 굽힘 강성, ρ 는 판의 밀도, h_1 는 plate 1의 두께이다. 따라서 식 (23)의 속도를 이용한 가진점의 에너지 밀도는

$$\langle e_0 \rangle = \frac{mv_0^2}{2} \tag{24}$$

로 표현할 수 있다. 식 (24)를 이용하여 계산한 입력 파워는 $\pi_{in} = F_0^2 / \sqrt{D\rho h}$ 이고, μr_0 가 작다고 가정하면 식 (20)에서 $e^{-\mu r} \approx 1 - \mu r_0$ 이므로 식 (20)의 에너지 밀도와 식 (24)가 같아지는 반경 r_0 는

$$r_0 = \frac{1}{\pi^2 / \lambda + \mu} \tag{25}$$

가 된다. 여기서 λ 는 굽힘에 대한 평판의 파장을 나타낸다. 하이브리드 방법에서는 평판의 가진점으로부터 r_0 이내의 범위에서는 일정한 값의 에너지 밀도를 가정한다. 따라서 식 (20)으로부터 직접장의 에너지 밀도는 식 (26)과 같다.

$$\langle e_{d1} \rangle = \begin{cases} \frac{\pi_{in}}{2\pi c_{g1} r_0} e^{-\mu_1 r_0} & (0 < r < r_0) \\ \frac{\pi_{in}}{2\pi c_{g1} r} e^{-\mu_1 r} & (r > r_0) \end{cases} \tag{26}$$

(2) Plate 1의 잔향장

다음으로는 잔향장의 에너지 밀도 $\langle \bar{e}_r \rangle$ 를 구하고자 한다. 잔향장에서는 외부로부터의 에너지 유입이 없으므로 에너지 지배 방정식은 식 (27)과 같다.

$$\nabla^2 \langle \bar{e}_{r1} \rangle - \mu_1^2 \langle \bar{e}_{r1} \rangle = 0 \tag{27}$$

식 (27)을 만족하는 잔향장의 에너지 밀도는 식 (28)과 같이 표현할 수 있다.

$$\langle \bar{e}_r \rangle = A(y)e^{-\mu_1 x} + B(y)e^{\mu_1 x} + C(x)e^{-\mu_1 y} + D(x)e^{\mu_1 y} \tag{28}$$

참고문헌(12)에서는 네 계수를 위치에 상관없는 상수로 두고 해석하였으나 이 연구에서는 위치에 따른 잔향장의 에너지 밀도 변화를 고려하기 위해 각각 A 와 B 는 y 의 함수로, C 와 D 는 x 의 함수로 정의하였다.

식 (28)을 계산하기 위해서는 4개의 경계조건이 필요하다. 잔향장은 직접장의 에너지가 평판의 네 모서리에서 반사되어 형성된다. Plate 1과 plate 2가 결합되는 $x_1 = l_{x1}$ 에서 인텐시티 관계식은

$$\frac{c_{g1}^2}{\eta_1 \omega} \frac{d}{dx} \langle \bar{e}_{r1} \rangle \vec{i} \cdot \mathbf{n} = \Gamma \langle \vec{I}_{d1} \rangle \cdot \mathbf{n} \tag{29}$$

와 같다. 여기서 \vec{i} 은 x 방향 단위벡터, Γ 는 $x_1 = l_{x1}$ 모서리의 파워반사계수이며 그 외 세 모서리에서 식 (29)의 파워반사계수는 1이다. \mathbf{n} 은 모서리에 수직한 법선 벡터이며, \cdot 는 벡터의 내적이다. 각 방향으로 진행하는 파동은 서로 다른 방향의 파동의 크기에 영향을 주지 않으므로, 식 (29)의 좌변 계산 시 미분 방향과 동일한 방향으로 진행하는 항들만 고려한다. 각 모서리의 임의 지점에 대한 법선 방향 인텐시티를 $q_i = \Gamma \langle \vec{I}_{d1} \rangle \cdot \mathbf{n}$ 으로 정의하면

$$q_1(y) = \frac{\pi_{in}}{2\pi} \frac{\Gamma(l_x - x_0)}{r_1} e^{-\mu r_1} \tag{30}$$

$$q_2(y) = \frac{\pi_{in}}{2\pi} \frac{x_0}{r_2} e^{-\mu r_2} \tag{31}$$

$$q_3(x) = \frac{\pi_{in}}{2\pi} \frac{l_y - y_0}{r_3} e^{-\mu r_3} \tag{32}$$

$$q_4(x) = \frac{\pi_{in}}{2\pi} \frac{y_0}{r_4} e^{-\mu r_4} \tag{33}$$

과 같이 정의될 수 있다. 여기서

$$r_1 = [(l_x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2},$$

$$r_2 = [x_0^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$$

$$r_3 = [(x - x_0)^2 + (l_y - y_0)^2]^{1/2},$$

$$r_4 = [(x - x_0)^2 + y_0^2]^{1/2}$$

이고 좌변의 하첨자는 Fig. 2에 표시한 모서리의 번호에 해당한다. 식 (30)~식 (33)을 식 (29)에 각각 대입하여 잔향장 에너지 밀도의 네 계수를 계산할 수 있다.

Plate 1의 전체 에너지 밀도 $\langle \bar{e}_1 \rangle$ 는 직접장 에너지 밀도와 잔향장 에너지 밀도의 합으로써 표현된다.

$$\langle \bar{e}_1 \rangle = \langle e_{d1} \rangle + \langle \bar{e}_{r1} \rangle \tag{34}$$

(3) Plate 2의 직접장

다음으로는 plate 2의 에너지 밀도를 계산한다. Plate 2의 진동 에너지는 plate 1에서 투과되어 유입되는 에너지에 의해 형성된다. Plate 2에 유입되는 투과 파워 π_t 는 식 (35)와 같다.

$$\pi_t = T \int_0^{l_y} \langle \vec{I}_{d1} \rangle \cdot \mathbf{n} \, dy \tag{35}$$

여기서 T 는 평판 결합부의 파워투과계수이다. 두 평판이 접하는 결합부의 파워투과계수 T 는 두 개의 반무한 평판이 결합되어 있다고 단순화하여 해석하였다. 따라서, 결합부에 입사되는 파동과 투과되는 파동은 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$w_1 = A_{in} \left(a e^{ik_1 \cos \theta_1 x} + a_j e^{\psi_1 x} + e^{-ik_1 \cos \theta_1 x} \right) e^{-ik_1 \sin \theta_1 y} \tag{36}$$

$$w_2 = A_{in} \left(b e^{-ik_2 \cos \theta_2 x} + b_j e^{-k_2 \cos \theta_2 x} \right) e^{-ik_1 \sin \theta_1 y} \tag{37}$$

여기서 k_1 은 입사파의 파수, k_2 는 투과파의 파수이고, θ_1 과 θ_2 는 각각 입사각과 투과각을 의미한다. A_{in} 는 입사파의 진폭, a 와 a_j 는 입사파의 반사계수, b 와 b_j 는 투과파의 투과계수이다. 하첨자 j 는 감쇄파를 의미한다. 적용할 수 있는 경계조건은

$$w_1 = w_2 \tag{38}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{39}$$

$$M_{x_1} = M_{x_2} \tag{40}$$

$$V_{x_1} = V_{x_2} \tag{41}$$

이다. M 과 V 은 각각 굽힘 모멘트와 전단력을 의미한다. 파워투과계수와 파워반사계수는 각각 식 (42), 식 (43)과 같다.

$$T = \frac{D_2}{D_1} \frac{k_2^3 \cos \theta_2}{k_1^3 \cos \theta_1} |t|^2 \tag{42}$$

$$\Gamma = 1 - T \tag{43}$$

하이브리드 방법에서는 평판의 에너지 밀도를 직접장과 잔향장으로 구성해야 하므로 투과된 파워를 직접장 파워와 잔향장 파워로 분리해야 한다. 그러나, plate 2에는 외력이 작용하지 않으므로 plate 2만으로는 직접장을 구성할 수 없다. 즉, 직접장이 존재하기 위해서는 평판에 가진력이 작용해야 한다.

따라서 이 연구에서는 plate 2에 직접장을 구현하기 위해 Fig. 3과 같이 길이가 $l_{x1} + l_{x2}$ 이고 두께가 h_2 로 일정한 가상의 평판을 도입한다. 이 가상 평판의 (x_0, y_0) 지점에 동일한 투과 파워 π_t 를 만들어주는 입력 파워 π_{in} 가 작용한다고 가정하면 plate 2에 형성되는 직접장을 구할 수 있다. 가상 평판에 사용되는 기호에는 $_$ 을 붙여 구분한다. 가상 평판의 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 구역은 Fig. 1의 plate 2와 동일하므로, Fig. 1의 plate 2 대신 이 가상 평판의 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 구역 에너지 밀도를 구한다.

가상 평판에서 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 영역으로 투과되는 파워 π_t 는

$$\pi_t = \int_0^{l_y} \langle \vec{I}_d \rangle \cdot \mathbf{n} \, dy \tag{44}$$

로 표현할 수 있다. 식 (21)로부터 가상 평판에서 잔향장의 인텐시티 $\langle \vec{I}_d \rangle$ 는

$$\langle \vec{I}_d \rangle = \frac{Ac}{r} e^{-\mu r} \tag{45}$$

로 표현할 수 있고 여기서 A 는 가상 평판의 잔향장

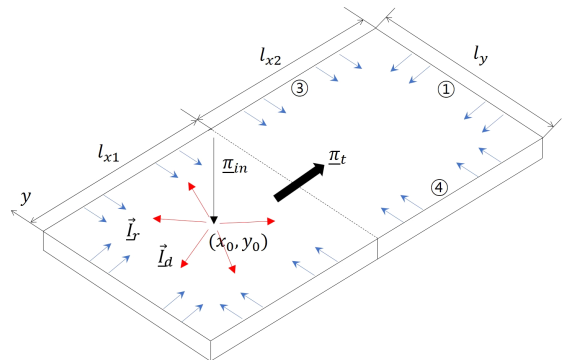


Fig. 3 A fictitious plate model to implement the direct field into plate 2

인텐시티 계수이다. π_t 는 π_l 와 같아야 한다는 조건을 적용하면 식 (35)와 식 (44)으로부터 $\langle \vec{I}_d \rangle$ 를 계산할 수 있다. $\langle \vec{I}_d \rangle$ 로부터 가상 평판의 입력 파워 π_{in} 를 구하면

$$\pi_{in} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} 2\pi r_0 \langle \vec{I}_d \rangle \quad (46)$$

이 된다. 따라서 가상 평판의 직접장 에너지 밀도

$$\langle \underline{e}_d \rangle = \frac{\langle \vec{I}_d \rangle}{\underline{c}_g} = \frac{\pi_{in}}{2\pi r \underline{c}_g} e^{-\mu r} \quad (47)$$

을 얻는다. 여기서 r 은 가진점 (x_0, y_0) 로부터 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 인 구역의 임의지점 (x, y) 까지의 거리이다.

(4) Plate 2의 잔향장

다음으로 가상 평판의 잔향장 에너지 밀도를 구하는 과정에 대해 기술한다. 가상 평판의 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 영역은 세 개의 연속되지 않은 모서리(①, ③, ④)에서 에너지 반사가 발생한다. 따라서 식 (40)과 같이 세 개의 항으로 잔향장의 에너지 밀도를 구성한다.

$$\langle \underline{e}_r \rangle = \underline{B}(y)e^{\mu x} + \underline{C}(x)e^{-\mu y} + \underline{D}(x)e^{\mu y} \quad (48)$$

세 모서리에 입사되는 직접장 인텐시티와 각 모서리에서 반사되는 인텐시티 사이의 관계식은

$$\langle \vec{I}_r \rangle = -\langle \vec{I}_d \rangle \cdot \mathbf{n} = -\frac{c^2}{\omega \eta} \nabla \langle \underline{e}_r \rangle \cdot \mathbf{n} \quad (49)$$

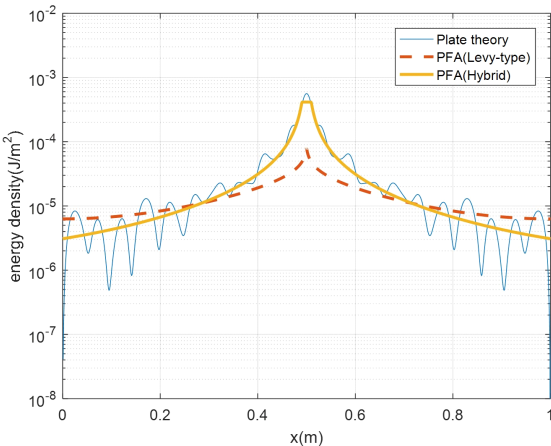


Fig. 4 Distribution of the energy density predicted from plate theory and power flow method at 1 kHz

로 표현할 수 있다.

가상 평판에서 얻어진 $l_{x1} \leq x \leq l_{x2}$ 구역의 직접장 에너지 밀도와 잔향장 에너지 밀도를 합하면 plate 2의 에너지 밀도가 된다.

$$\langle \underline{e}_2 \rangle = \langle \underline{e}_d \rangle + \langle \underline{e}_r \rangle \quad (50)$$

3. 해석 결과

연성된 평판의 해석 결과에 앞서, 단순 평판에 대해 하이브리드 방법과 Levy-type 방법을 적용하여 구한 결과를 비교하였다.

Fig. 4와 Fig. 5로부터, 하이브리드 방법을 이용해 얻은 파워흐름해석 결과는 가진점 부근에서 판 이론 해석결과와 매우 유사함을 알 수 있다. 그러나 판의 가장자리 부근에서는 하이브리드 방법이 Levy-type 방법보다 낮은 값을 나타내었다.

이 절에서는 Fig. 1과 Table 1에 제시된 연성된 두 개의 사각 평판에 대하여 Levy-type 방법과 하이브리드 방법을 이용해 파워흐름해석을 수행하고 그 결과를 판 이론 해석결과와 비교하였다. 단위하중의 외력은 $x_0 = y_0 = 0.25$ m 지점에 작용시켰으며 해석 주파수는 1 kHz와 5 kHz를 선택하였다.

Fig. 6과 Fig. 7에는 가진력이 작용하는 $y = y_0$ 지점의 x 에 따른 에너지 밀도 변화를 1 kHz와 5 kHz에서 해석한 결과를 나타내었다. Fig. 6과 Fig. 7에서 Levy-type 방법의 결과를 판 이론 해석 결과와 비교해보면, Levy-type으로 구한 에너지 밀도가 가진점 부근에서는

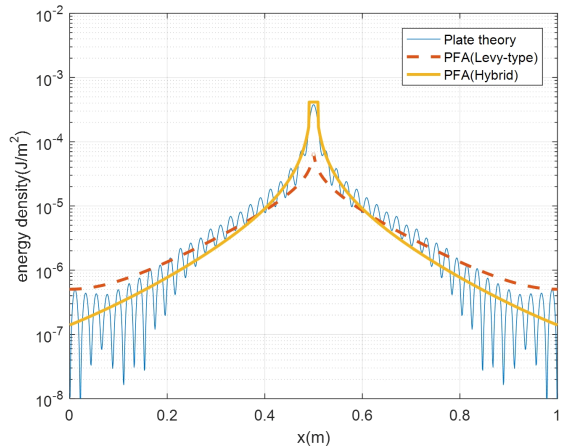


Fig. 5 Distribution of the energy density predicted from plate theory and power flow method at 5 kHz

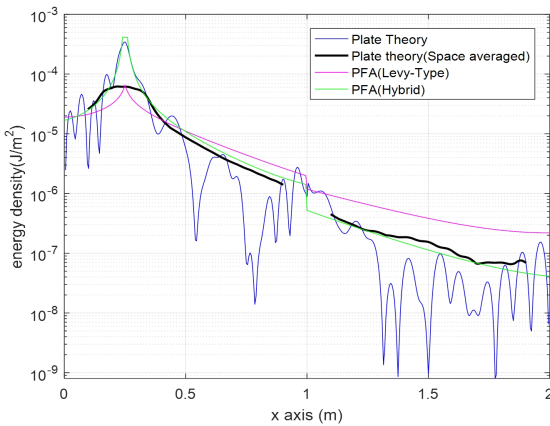


Fig. 6 Distribution of the energy density predicted from plate theory using moving average and power flow method at 1 kHz

판 이론 해석 결과보다 낮게 예측되는 반면 가진점에서 멀어질수록 판 이론 해석결과보다 높게 예측되었다. 특히 plate 2에서는 판 이론 해석결과보다 약 2배~3 배 크게 나타났다. 반면에 하이브리드 방법의 경우에는 직접장 에너지 밀도에 공간평균이 적용하지 않으므로 가진점 부근에서 판 이론 해석결과와 유사한 에너지 밀도를 보인다. 특히, 가진점에서 멀어질수록 Levy-type보다 낮은 에너지 밀도를 가지면서 판 이론해석결과에 좀 더 가깝게 예측되었다.

파워흐름해석은 시간과 공간에 대해 평균된 에너지 밀도인 반면 판 이론으로 구한 에너지 밀도는 시간에 대해서만 평균되어 있어 Fig. 6과 Fig. 7에서 알 수 있는 것처럼 공간에 따른 에너지 밀도의 변화가 크게 발생한다. 따라서 파워흐름해석 결과와 보다 정확히 비교하기 위해 판 이론으로 구한 에너지 밀도에 공간 평균을 적용하였다.

적용한 이동 평균(moving average)은 전체 데이터에 대해 일정한 부분 집합의 크기로 반복하여 평균하는 방법으로, 주로 그래프의 급격한 동요를 제거하거나 추세를 확인하기 위해 사용된다. 파워흐름해석에서는 에너지 밀도를 공간에 대하여 반 파장만큼 평균하는데, 1 kHz에서 plate 2의 에너지 전달 속도 c_g 는 약 280 m/s이므로 반 파장은 약 0.14 m가 된다. 이 논문에서는 공간 평균의 폭과 길이를 반 파장보다 조금 큰 약 0.18 m로 설정하여 x 와 y 방향에 대해 이동 평균을 계산하였다.

판 이론으로 구한 시간과 공간에 대해 평균된 에너지 밀도는 Fig. 6과 Fig. 7에 함께 비교하여 나타내었다. 직접장이 우세한 가진점 부근을 제외하면 하이브리드 방

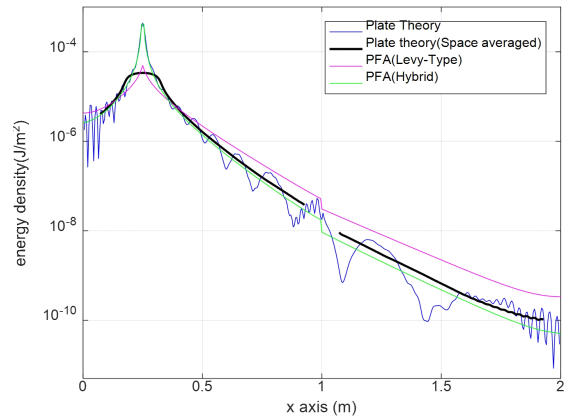


Fig. 7 Distribution of the energy density predicted from plate theory using moving average and power flow method at 5 kHz

법의 결과가 시간과 공간에 대해 평균된 판 이론 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 6과 Fig. 7의 결과는 특정 위치의 에너지 밀도를 비교한 것이므로 평균 전체, 특히 plate 2 전체의 에너지 밀도에 대한 결과 비교가 필요하다. Fig. 8과 Fig. 9에는 1 kHz에서 구한 판 전체의 에너지 밀도 분포를 3차원 그래프로 비교하였다. Fig. 8과 Fig. 9의 비교로부터, Levy-type 방법은 plate 2 전체에서 판 이론 해석 결과보다 높은 에너지 밀도를 보이는 반면 하이브리드 방법은 위치에 따라 판 이론보다 높거나 낮은 분포를 보이고 있다. 따라서 판 이론 해석결과에 공간 평균이 적용될 경우 하이브리드 방법이 판 이론 해석 결과에 보다 근사함을 알 수 있다.

Fig. 8과 Fig. 9의 비교로부터, Levy-type 방법은 plate 2 전체에서 판 이론 해석결과보다 높은 에너지 밀도를 보이는 반면 하이브리드 방법은 판 이론 해석 결과에 보다 근사함을 알 수 있다. Fig. 8과 Fig. 9에 나타난 파워흐름해석방법과 판 이론 해석방법의 정량적 비교를 위해 plate 2에서 공간 평균 오차를 계산하였다. 평균오차 J 는 판 이론 해석결과와 파워흐름해석 결과의 각 위치별 에너지 차이를 합산한 후 노드 수로 나누었고 식 (43)과 같다.

$$J = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{e_P}{e_T} - 1 \right) \tag{51}$$

여기서 N 은 plate 2 영역의 노드 수, e_T 는 판 이론의 에너지 밀도, e_P 는 파워흐름해석의 에너지 밀도이다. 식 (51)로부터 구한 Levy-type 방법과 하이브리드 방

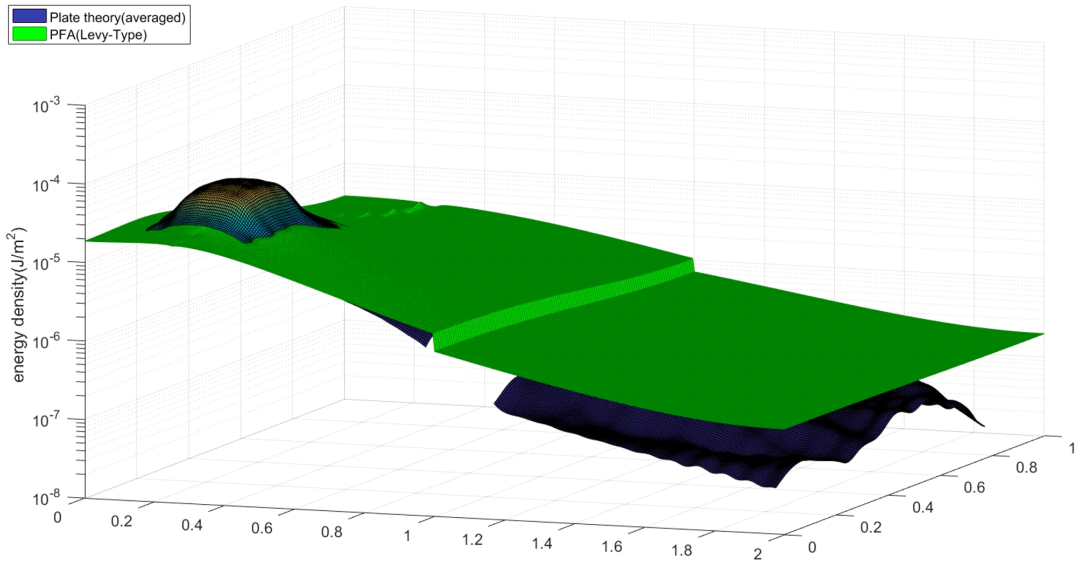


Fig. 8 Distribution of the energy density predicted from the space averaged plate theory and power flow method using Levy-type solution

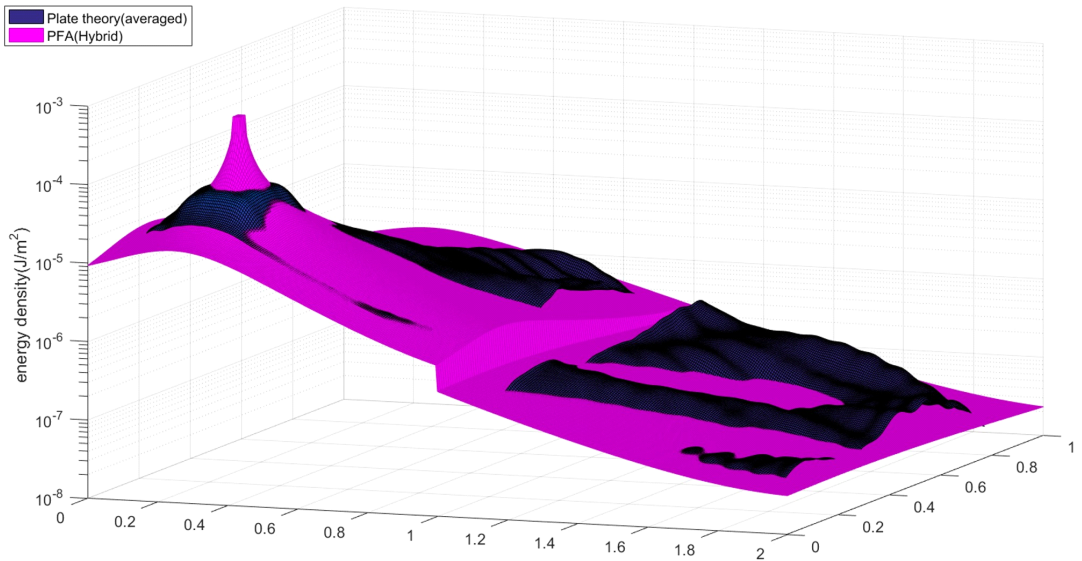


Fig. 9 Distribution of the energy density predicted from the space averaged plate theory and power flow method using Hybrid method

법의 평균오차는 각각 3.64와 -0.05로 계산되었고 이를 통해 plate 2 영역에서 오차가 적은 하이브리드 방법의 결과가 더 정확하다고 판단된다.

4. 결 론

이 연구에서는 연성된 직사각형 평판에 대하여 Levy-

type 방법과 하이브리드 방법을 적용하여 파워흐름 해석을 수행하고, 두 방법의 신뢰성 검토를 위해 판 이론 해석 결과와 비교하였다. 연성된 평판에 하이브리드 방법을 적용하기 위해서 plate 2와 동일한 두께를 가지는 가상 평판을 도입하여 plate 2 영역의 에너지 밀도를 계산하였다. 이 연구를 통해 도출한 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) Levy-type 방법은 가진점 부근에서 에너지 밀도를 판 이론 해석 결과보다 낮게 예측하는 반면, 하이브리드 방법은 판 이론 해석결과와 잘 부합함을 확인하였다. 그 이유는, 하이브리드 방법으로 구한 직접장의 에너지 밀도는 Levy-type 방법과 달리 공간 평균이 적용되지 않기 때문이다.

(2) Levy-type 방법은 가진점 부근을 제외한 전 영역에서 판 이론 해석결과 보다 2~3배 높은 에너지 밀도를 얻은 반면 하이브리드 방법은 판 이론 해석결과와 잘 부합함을 확인하였다.

이상의 비교를 통해, 연성 평판의 파워흐름해석에 하이브리드 방법을 적용하기 위해 이 연구에서 도입한 가정들이 타당함을 검증하였으며 연성 평판 해석에 하이브리드 방법이 적용 가능함을 확인하였다.

이 연구에서는 두 개의 사각 평판이 연성된 경우를 다루었으나 추후 다양한 형태의 연성 조건에 대하여 하이브리드 방법의 신뢰성을 확인하고 해석 범위를 확장하는 작업들이 수행되어야 할 것으로 판단한다.

후 기

이 연구는 2018년도 현대중공업의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

References

- (1) Belov, V. D., Rybak, S. A. and Tartakovskii, B. D., 1977, Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures, *Journal of Soviet Physics Acoustics*, Vol. 23, No. 2, pp. 115~119.
- (2) Noiseux, D. U., 1970, Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 47, No. 1B, pp. 238~247.
- (3) Bouthier, O. M. and Bernhard, R. J., 1995, Simple Models of Energy Flow in Vibrating Membranes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 182, No. 1, pp. 129~147.
- (4) Li, T. Y., Liu, J. X. and Zhang, T., 2004, Vibrational Power Flow Characteristics of Circular Plate Structures with Peripheral Surface Crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 276, No. 3, pp. 1081~1091.
- (5) Wohlever, J. C. and Bernhard, R. J., 1988, Vibrational Power Flow Analysis of Rods and Beams, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- (6) Wohlever, J. C. and Bernhard, R. J., 1992, Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 1, pp. 1~19.
- (7) Nefske, D. J. and Sung, S. H., 1989, Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems: Basic Theory and Application to Beams, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 111, No. 1, pp. 94~100.
- (8) Bouthier, O. M. and Bernhard, R. J., 1995, Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 182, No. 1, pp. 149~166.
- (9) Kim, H. S., Kang, H. J. and Kim, J. S., 1993, A Vibration Analysis of Plates at High Frequencies by the Power Flow Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174, No. 4, pp. 493~504.
- (10) Park, D. H., Hong, S. Y., Kil, H. G. and Jeon, J. J., 2001, Power Flow Models and Analysis of In-plane Waves in Finite Coupled Thin Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244, No. 4, pp. 651~668.
- (11) Wang, S. and Bernhard, R. J., 2009, Prediction of Averaged Energy for Moderately Damped Systems with Strong Coupling, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, No. 3, pp. 426~444.
- (12) Smith, M. J., 1997, A Hybrid Energy Method for Predicting High Frequency Vibrational Response of Point-loaded Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 202, No. 3, pp. 375~394.
- (13) Park, D. H., Hong, S. Y. and Kil, H. G., 1998, Vibration Power Flow Analysis of Coupled Co-planar Rectangular Plates, *Journal of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 8, No. 6, pp. 1053~1061.
- (14) Park, D. H., 1999, Vibration Power Flow Analysis of Coupled Plates and Box-type Structures, Master's Thesis, University of Seoul, Seoul, Korea.
- (15) Hwang, D. W., 2006 Transient Power Flow Analysis of Beam and Plate, Master's Thesis, University of Seoul, Seoul, Korea.
- (16) Vlahopoulos, N., 2005, Energy Finite Element Analysis for Computing the High Frequency Vibration of the Aluminum Testbed Cylinder and Correlating the Results to Test Data, (University of Michigan Contractor Report), NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.

(17) Vlahopoulos, N., 2011, Structural-acoustic Simulations of Naval Vehicles Using an Energy Finite Element Method, Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, No. DETC 2011-47758, pp. 509~516.

(18) Zhang, W., Wang, A., Vlahopoulos, N. and Wu, K., 2003, High-frequency Vibration Analysis of Thin Elastic Plates under Heavy Fluid Loading by an Energy Finite Element Formulation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 263, No. 1, pp 21~46.



Hyunyoung Kang completed his Bachelor Degree from Pukyong National University in 2017, and Master Degree from University of Ulsan in 2019. He is currently a researcher at Hyundai Heavy Industry.



Jungsoo Ryue graduated with a B.S. degree in Mechanical Engineering from Pusan National University in 1995. He received a M.S. degree in KAIST, and received his second M.Sc. and Ph.D. in ISVR at the University of Southampton in UK.

He has been working for the School of Naval Architecture and Ocean Engineering at the University of Ulsan since 2009. His research interests include wave propagation along waveguide structures, vibro-acoustic problems, and related signal processing.



Ki-Sun Kim completed his Doctoral Degree in 2012 from KAIST Mechanical and Aerospace Engineering. He is currently a senior researcher at Hyundai Heavy Industry.