



유체-구조간 결합을 고려한 진동-음향 모델의 축소 Performance of Multiphysics Model Reduction of Vibro-acoustic Coupled Problem

김수민* · 채수원** · 박광춘*** · 김진균†
Soo Min Kim*, Soo-Won Chae**, K. C. Park*** and Jin-Gyun Kim†

(Received May 9, 2019 ; Revised July 2, 2019 ; Accepted July 9, 2019)

Key Words : Vibro-acoustic Interaction(진동-음향 연성), Fluid-structure Interaction(유체-구조 연성), Multi-physics Problem(다중-물리 모델), Reduced-order Modeling(모델 축소 기법)

ABSTRACT

We introduce a strongly coupled model reduction method recently developed for well-known vibro-acoustic interaction, which is a standard (u, p) formulation. The key principle of the scheme is a sequential reduction process from the structure to fluid domains. The sequential projection allows for a strong connection between two different physical domains, unlike conventional schemes that reduce two domains at once, and then better accuracy of the resulting reduced model can be expected. In this study, we compared the performance of the strongly coupled method of the (u, p) formulation to the conventional uncoupled and weakly coupled methods. We herein considered frequency domain analysis and transient analysis. In addition, we investigated the symmetric (u, p, φ) formulation and its condensation techniques.

기 호 설 명

c : 음속
 f : 힘 벡터
 H : 커플링 행렬
 I : 단위 행렬
 K : 강성 행렬
 M : 질량 행렬
 n : 자유도 크기
 p : 압력 벡터
 T : 변환 행렬
 u : 변위 벡터
 Γ : 유체부 고유값 행렬

Υ : (p, φ) 구속 행렬
 φ : 포텐셜 벡터
 Λ : 구조부 고유값 행렬
 Ξ : 유체부 고유값 벡터 행렬
 ρ : 밀도
 Φ : 구조부 고유값 벡터 행렬
 Ψ : (u, p) 구속 행렬

첨 자

C : 응축
 d : 주요 모드
 f : 유체부

† Corresponding Author; Member, Department of Mechanical Engineering, Kyung Hee University
E-mail: jingyun.kim@khu.ac.kr
* Simulation Group, Samsung SDI
** Department of Mechanical Engineering, Korea University
*** Department of Aerospace Engineering Science and Center for Aerospace Structures, University of Colorado

A part of this paper was presented and selected as one of best papers at the KSNVE 2019 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Won Ju Jeon
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

s : 구조부
 sc : 강결합법
 $symm$: 대칭
 wc : 약결합법

1. 서 론

진동-음향 연성(vibro-acoustic interaction)은 소음-진동 분야의 대표적인 다중-물리 문제(multi-physics problem) 중 하나로, 차량 내 소음전파⁽¹⁾, 지진 하중 시원자로 냉각수의 진동⁽²⁾, 발사체 내 액체연료 거동⁽³⁾ 및 인공와우 개발⁽⁴⁾ 등 다양한 적용 사례가 존재한다. 일반적인 진동-음향 연성 모델의 경우, 구조체는 선형 탄성(linear elastic), 유체는 비점성(invscid), 비회전성(irrotational)으로 가정되며, 효과적인 계산을 위하여 주로 유한요소법(finite element method, FEM)이 활용된다⁽⁵⁾.

최근 컴퓨터 하드웨어 및 계산 기술의 급격한 발전으로 인하여 굉장히 크고 복잡한 대상도 상당히 손쉽게 디지털 모델을 생성할 수 있고, 또한 다양한 시뮬레이션을 진행할 수 있다. 그러나 유체부는 일반적으로 구조부에 비하여 많은 요소(element)가 필요하며, 더군다나 유체-구조간 결합 모델 같은 다중-물리 현상을 구현하고 시뮬레이션 하는 데에는 훨씬 많은 계산 비용(computational cost)이 필요하다. 이러한 문제를 효과적으로 다루기 위해 구조 동역학 분야에서는 모델 축소 기법이 개발되어 연구 및 산업 현장에서 널리 활용되고 있다⁽⁶⁻¹¹⁾. 2000년대 이후로는 구조 동역학 뿐만 아니라 다중-물리 현상 모델 분야로 확장하는 연구도 활발히 이루어지고 있다^(7,12-14).

이 연구에서는 유체와 구조체의 상호작용(fluid-structure interaction, FSI)의 대표적인 모델 중 하나인 진동-음향 연성 모델을 다룬다. 특히, FSI 분야에서의 모델 축소 기법들 중에서, 최근에 개발되어 뛰어난 성능과 높은 효율성이 증명된 강결합법(strongly coupled approach)을 소개하고⁽¹²⁾, 기존 기법과의 비교를 진행하였다. 이를 위해 여러 모델에 대하여 주파수 응답 함수(frequency response function) 분석 또는 정상 상태(steady state) 해석을 수행하였고, 또한 강결합법의 핵심 원리를 다른 형태의 FSI 운동방정식에 적용하기 위한 사전 연구를 진행하였다. 이를 위해 이 연구에서는 3종류의 FSI 운동방정식을 검토하였다.

2. FSI 시스템의 표현 형태

일반적으로 구조 진동학에서 임의의 구조물에 대한 운동방정식은 구조부의 변위(u)를 주요 변수로 사용한다. 반면에 음향-유체 모델에서는 압력(p) 또는 포텐셜(φ)이 주로 사용된다. 이를 바탕으로 다양한 형태의 FSI 운동방정식이 구성될 수 있는데, 일반적으로 아래와 같이 구조부에서의 변위와 유체부에서의 압력을 이용한 비대칭형 운동방정식이 표준 형태로 알려져 있고 가장 널리 사용된다⁽¹³⁾.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \rho c^2 \mathbf{H}^T \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 질량 및 강성행렬을 나타내며, 아래첨자 s 와 f 는 각각 구조부와 유체부의 약자를 의미한다. 두 도메인 사이에 커플링 효과를 부여하는 커플링 행렬은 \mathbf{H} 로 표현되었으며, \mathbf{f} 는 힘벡터를 나타낸다. 시스템을 구성하는 유체부에서의 음속(speed of sound)을 \mathbf{p} 로 나타냈다. 식 (1)을 표준형 또는 (u, p) 형태라고 부르며, 이와 달리 유체부에서 압력항이 아닌 포텐셜 항을 이용하여 아래와 같은 (u, φ) 형태가 사용되기도 한다⁽¹³⁾.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \rho \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ -c^2 \mathbf{H}^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

지금까지 살펴본 2개의 공식은 모두 비대칭 형태를 가진다. 그러나 FSI 모델을 유한요소법을 이용하여 다루고자 했던 초창기에는 대부분의 상용 소프트웨어들이 기존의 대칭형 구조 방정식을 풀기 위해 개발된 상태였기 때문에, 이러한 비대칭 공식들을 그대로 적용하기에 어려움이 있었다. 따라서 많은 연구자들이 대칭형 공식을 만들기 위하여 다양한 연구들을 진행하였고^(15,16), 결과적으로는 아래의 공식이 다양한 유한요소 상용 프로그램들에 내장되는 등 널리 사용되고 있다^(13,14).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{K}_f / c^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{H} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H}^T & -\mathbf{M}_f / \rho c^2 & \mathbf{K}_f / c^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f / c^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

지금까지 살펴보았던 3개의 공식들은 모두 다른 형태를 가지고 있지만, 자세히 살펴보면 그 안에 사용되고 있는 항들이 모두 동일한 것을 볼 수 있다. 이는 구조부와 유체부에서의 질량 및 강성 행렬, 그리고 두 도메인을 연결시켜주는 커플링 행렬을 알고 있다면, 사용자가 단순히 항들의 재배열을 통해서 어떠한 형태의 공식이든 생성할 수 있다는 것을 의미한다. 또한, 이들은 당연히 서로 동일한 물리적 특성을 가지고 있다.

3. FSI 시스템의 축소

이 단원에서는 전통적인 유체-구조간 결합 축소기법인 약결합법(weakly coupled approach)을 소개한다. 이는 약결합법이 개발되기 이전에 사용되었던 비결합법(uncoupled approach)에 슈어 보완법(Schur complement)을 이용하여 두 도메인 사이의 커플링 효과를 적절히 반영한 기법이다. 이 기법은 구조 동역학 분야에 널리 사용되는 모드 투영법(modal projection method)을 기반으로 한다⁽¹³⁾.

먼저, 시스템을 구성하는 유체 및 구조부에 대하여 아래와 같은 2개의 독립된 고유값 문제(eigenvalue problem)가 정의된다.

$$\mathbf{K}_s(\boldsymbol{\Phi}_s)_i = (\lambda_s)_i \mathbf{M}_s(\boldsymbol{\Phi}_s)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_s, \quad (4a)$$

$$\mathbf{K}_f(\boldsymbol{\xi}_f)_i = (\gamma_f)_i \mathbf{M}_f(\boldsymbol{\xi}_f)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_f, \quad (4b)$$

여기서 $\boldsymbol{\Phi}_s$ 와 λ_s 는 구조부, 그리고 $\boldsymbol{\xi}_f$ 와 γ_f 는 유체부에서의 고유값 해(eigensolution)를 나타내며, 이 때 아래첨자 i 는 모드 번호(mode number)를 나타낸다. 또한 각 도메인에서의 모드 개수를 n_s 와 n_f 로 표현하였으며, 따라서 전체 시스템의 자유도 개수는 $n(= n_s + n_f)$ 로 정의된다. 모드 투영법은 식 (4)와 같은 고유값 문제를 계산하여, 전체 해 중에서 사용자가 중요하다고 생각하는 소수의 주요 모드(dominant mode)만을 선택하고, 이외에 필요하지 않다고 생각하는 잔여 모드(residual mode)는 사용하지 않는다. 이렇게 선택된 주요 모드를 이용하여 아래와 같은 약결합법의 변환 행렬(transformation matrix)을 생성할 수 있다.

$$\mathbf{T}_{wc} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_d & \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Xi}_d \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_d \end{bmatrix}, \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\Phi}_d$ 와 $\boldsymbol{\Xi}_d$ 는 식 (4)에서 구해진 고유값 벡터들 중에서 사용자가 선택한 주요 고유값 벡터를 나타낸다. 또한, 아래첨자 wc 는 약결합법을 의미한다. 이 때 두 도메인에서 선택된 주요 모드의 개수를 각각 n_s^d 와 n_f^d 로 정의한다. 추가로 $\boldsymbol{\Psi}$ 는 구속 행렬(constraint matrix)로서, 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{H}. \quad (6)$$

식 (5)에서 구속 행렬을 제거한 것이 비 결합법이며, 구속 행렬을 추가함으로써 두 도메인 사이의 커플링 효과가 적절하게 고려되고, 이로 인하여 기법의 정확도가 향상된다. 최종적으로는 식 (5)의 변환 행렬을 아래와 같이 모델의 시스템 행렬에 합동 변환(congruent transformation) 형태로 곱해주어 아래와 같은 축소된 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다⁽¹²⁾.

$$\overline{\mathbf{M}}_{wc} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Phi}_d^T \mathbf{M}_s \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Xi}_d \\ \boldsymbol{\Xi}_d^T \mathbf{X} \boldsymbol{\Phi}_d & \boldsymbol{\Xi}_d^T \hat{\mathbf{M}}_f \boldsymbol{\Xi}_d \end{bmatrix}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{X} = \rho c^2 \mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M}_s, \quad (7b)$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{wc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Xi}_d^T \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Phi}_d \boldsymbol{\Gamma}_d & \end{bmatrix}, \quad (7c)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위 행렬(identity matrix)을 나타내며, \mathbf{A}_d 와 $\boldsymbol{\Gamma}_d$ 는 각각 구조부와 유체부에서의 주요 고유값 행렬을 나타낸다. 또한, 상단바(upper bar)는 근사값을 나타낸다. 식 (7)은 모드 투영법을 이용한 축소 시스템 결과이며, 이 외에도 식 (3)과 같은 (u, p, φ) 공식의 행렬 응축(matrix condensation)을 통한 축소 방안도 존재한다. 식 (3)에 사용되는 3개의 변수들은 아래와 같은 관계식을 만족한다.

$$\mathbf{p} = -\mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{D}^T \varphi, \quad (8)$$

여기서 \mathbf{K}_p 와 \mathbf{D} 는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{M}_f / \rho c^2, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K}_f / c^2. \quad (9)$$

식 (8), 식 (9)를 이용하여, 식 (3)으로 표현된 대칭형 공식의 행렬 응축을 진행할 수 있으며 그 결과는 아래와 같다⁽¹³⁾.

$$\overline{\mathbf{M}}_{symm}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{K}_f / c^2 \end{bmatrix}, \quad (10a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{symm}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{H}\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{H}^T & -\mathbf{H}\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D}\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{H}^T & \mathbf{D}\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{D}^T \end{bmatrix}, \quad (10b)$$

이때, 윗첨자 C 는 응축(condensation)을 의미하며, 아래첨자 $symm$ 은 대칭을 나타낸다.

식 (3)과 같은 대칭형 공식은 식 (1), 식 (2)와는 다르게 대칭 형태를 가지고 있기 때문에, 다양한 프로그램에 별다른 가공 없이 삽입되어 사용될 수 있다는 장점이 있지만, 반면에 유체부에서 2개의 변수를 사용하면서 유체부의 행렬 크기가 2배로 커지는 단점이 있다. 따라서 이를 해결하고자 행렬 응축을 이용한 식 (10)과 같은 응축된 시스템 행렬을 제안한 연구가 진행되었다. 그러나, 이는 모드 투영법을 이용한 기법들과는 근본적인 원리가 다름에 주의해야 하며, 응축이 되었다고 해도 시스템의 크기가 기존 표준 형태와 동일하기 때문에 축소 효용이 매우 크다고 볼 수는 없다.

4. 강결합법을 이용한 축소

이 단원에서는 최근에 개발된 강결합법을 소개한다. 이는 앞서 3단원에서 다루었던 약결합법을 발전시킨 형태로 볼 수 있다⁽¹²⁾.

먼저, 식 (5)에 나타난 변환 행렬을 아래와 같이 2개 행렬의 곱으로 분할한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{wc} &= \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_d & \Psi \hat{\mathbf{E}}_d \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{E}}_d \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{T}_{wc}^{(1)} \times \mathbf{T}_{wc}^{(2)} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_d & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{E}}_d \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{T}_{wc}^{(1)}$ 과 $\mathbf{T}_{wc}^{(2)}$ 를 각각 1차 및 2차 약결합 변환 행렬이라고 정의한다. 2개의 변환 행렬을 살펴보면, 각각 구조부와 유체부에서의 주요 고유값 벡터를 독립적으로 포함하고 있는 것을 확인할 수 있는데, 이는 전체 시스템 행렬이 1차 및 2차 변환 행렬에 의해서 구조부와 유체부가 순차적으로, 또한 독립적으로 축소된다는 것을 의미한다. 이러한 2단계 축소 개념을 이용하여 $\mathbf{T}_{wc}^{(1)}$ 만을 이용한 1차 축소 시스템 행렬은 아래와 같다.

$$\bar{\mathbf{M}}_{wc}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \hat{\Phi}_d^T \mathbf{M}_s \Psi \\ \mathbf{X} \hat{\Phi}_d & \hat{\mathbf{M}}_f \end{bmatrix}, \quad (12a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{wc}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Lambda_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^T \hat{\Phi}_d & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}. \quad (12b)$$

식 (12)로부터, 우리는 구조부의 크기가 축소된 것을 확인할 수 있고, 또한 유체부에서의 질량 행렬이 업데이트 된 것을 볼 수 있다. 이때 업데이트된 유체부의 질량행렬 $\hat{\mathbf{M}}_f$ 은 아래와 같다.

$$\hat{\mathbf{M}}_f = \mathbf{M}_f + \mathbf{X} \Psi, \quad (13)$$

이는 구조부가 먼저 축소되면서 두 도메인 사이의 커플링 효과가 유체부에 반영된 것이다. 강결합법의 핵심 원리는 기존 유체부의 고유값 문제인 식 (4b)에서, 유체부의 질량 행렬을 식 (13)으로 교체하는 것이다. 결과적으로 아래와 같은 강결합법 변환 행렬이 정의된다⁽¹²⁾.

$$\mathbf{T}_{sc} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_d & \Psi \hat{\mathbf{E}}_d \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{E}}_d \end{bmatrix}, \quad (14)$$

여기서 $\hat{\mathbf{E}}_d$ 은 업데이트된 질량 행렬을 이용하여 얻은 고유값 벡터 중에서 사용자가 선택한 주요 모드를 나타낸다. 강결합법의 변환행렬을 이용하여 아래와 같이 축소된 시스템행렬을 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{M}}_{sc} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \hat{\Phi}_d^T \mathbf{M}_s \Psi \hat{\mathbf{E}}_d \\ \hat{\mathbf{E}}_d^T \mathbf{X} \hat{\Phi}_d & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (15a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{sc} = \begin{bmatrix} \Lambda_d & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{E}}_d^T \mathbf{H}^T \hat{\Phi}_d & \hat{\Gamma}_d \end{bmatrix}. \quad (15b)$$

5. 계산비용에 대한 고찰

우리는 표준 형태의 운동방정식에 대하여, 약결합법 및 강결합법의 계산 비용 차이를 분석하고자 하며, 여기에 추가적으로 대칭형 운동방정식의 응축 과정에 소요되는 계산 비용을 분석한다. 이미 기존의 연구에서 강결합법이 약결합법에 비하여 상당히 향상된 정확도를 가진다는 것이 증명된 바 있지만⁽¹²⁾, 계산 비용 측면에서의 비교는 이루어지지 않았다. 계산 비용의 비교에 앞서 약결합법 및 강결합법을 이용하여 모델을 축소하는 방식은 응축 방식과 비교하여 원리 자체가 다르고, 생성되는 시스템의 크기도 다르기 때문에

직접적인 비교는 불가하다는 점을 밝히고자 한다.

이 절에서는 임의의 크기를 가지는 FSI 모델이 주어졌을 때, 약결합법 및 강결합법을 이용하여 최종 축소 모델을 생성하는 과정에서 기법들 간의 계산 비용을 비교하였다. 사용자가 원하는 축소 모델을 생성하기 위해서는 다음과 같은 3개의 주요 과정이 필요하다. 첫째, 구조부의 고유값 문제 풀이 과정. 둘째, 유체부의 고유값 문제 풀이 과정. 그리고 마지막으로 식 (7) 또는 식 (15)를 생성하기 위한 블록 행렬의 내부 항들 계산 과정이 그것이다.

일반적으로 n 의 자유도를 가지는 시스템의 고유값 문제를 풀기 위해서는 n^3 의 계산 비용이 요구된다. 임의의 시스템의 구조부와 유체부의 자유도 크기를 각각 n_s 및 n_f 라고 하면 두 도메인의 고유값 문제의 계산에는 $n_s^3 + n_f^3$ 의 계산 비용이 발생한다. 추가적으로 $a \times b$ 의 크기를 가지는 행렬 \mathbf{A} 와 $b \times c$ 의 크기를 가지는 행렬 \mathbf{B} 를 곱한 결과물인 $a \times c$ 의 크기를 가지는 행렬 \mathbf{C} 의 계산 과정에는 $ac(2b-1)$ 의 계산 비용이 필요하다. 이러한 원리를 바탕으로 식 (7), 식 (10) 및 식 (15)에 표기된 구성항들의 계산 비용을 분석하면 Table 1과 같다. 최종 결과물에 단위 행렬 또는 이미 계산된 고유값 행렬 등이 존재하기 때문에, 실제로 변환 행렬을 구성하여 전체 시스템 행렬에 이를 곱해주는 것보다 이렇게 블록 행렬들을 구하여 조립하는 것이 훨씬 효과적이다.

또한, 강결합법에서만 업데이트된 유체부의 질량 행렬 $\hat{\mathbf{M}}_f$ 이 사용되는 것처럼 생각할 수 있지만, 식 (7a)에서 확인할 수 있듯이 이는 약결합법에서도 사용되

Table 1 Operation counts for computing block matrices

	Component	Operation counts
Eq. (7): Weakly coupled	$\Phi_d^T \mathbf{M}_s \Psi \mathbf{E}_d$	$m_s^d(2n_s - 1) + n_s^d n_f^d(2n_f - 1)$
	$\mathbf{E}_d^T \mathbf{X} \Phi_d$	$n_f^d n_s(2n_f - 1) + n_s^d n_f^d(2n_s - 1)$
	$\mathbf{E}_d^T \hat{\mathbf{M}}_f \mathbf{E}_d$	$n_f^d(2n_f - 1)(n_f + n_f^d)$
	$\mathbf{E}_d^T \mathbf{H}^T \Phi_d$	$n_f^d n_s(2n_f - 1) + n_f^d n_s^d(2n_s - 1)$
Eq. (10): Matrix condensation	\mathbf{K}_p^{-1}	$2n_f^3/3 + n_f^2 + 2$
	$\mathbf{K}_s + \mathbf{H} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{H}^T$	$n_s n_f(2n_f - 1) + n_s^2(2n_f - 1)$
	$\mathbf{H} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{D}^T$	$2n_s n_f(2n_f - 1)$
	$\mathbf{D} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{D}^T$	$2n_f^2(2n_f - 1)$
Eq. (15): Strongly coupled	$\Phi_d^T \mathbf{M}_s \Psi \hat{\mathbf{E}}_d$	$m_s^d(2n_s - 1) + n_s^d n_f^d(2n_f - 1)$
	$\hat{\mathbf{E}}_d^T \mathbf{X} \Phi_d$	$n_f^d n_s(2n_f - 1) + n_s^d n_f^d(2n_s - 1)$
	$\hat{\mathbf{E}}_d^T \mathbf{H}^T \Phi_d$	$n_f^d n_s(2n_f - 1) + n_f^d n_s^d(2n_s - 1)$

는 항이기 때문에 유체부의 질량 행렬을 업데이트하는 비용은 두 기법에서 모두 동일하다. 그리고 비록 유체부의 질량 행렬이 업데이트 되더라도 도메인의 크기가 변화하지는 않으므로 구조부와 유체부의 고유값 문제를 계산하는데 두 기법 사이에 계산 비용 차이가 발생하지는 않는다. 추가적으로, 축소된 시스템 행렬을 구성하는 블록 행렬들을 계산할 때에도, 단순히 기존의 유체부 고유값 벡터 \mathbf{E}_d 를 업데이트된 유체부의 고유값 벡터 $\hat{\mathbf{E}}_d$ 으로 치환하는 것이기 때문에 추가적인 계산 비용은 발생하지 않는다.

그러나 축소된 질량 행렬의 2행 2열을 비교하면 차이점을 확인할 수 있는데, 약결합법에서 3개 행렬의 곱으로 표현되어 있는 부분이 강결합법에서 단위행렬로 변경된 것을 볼 수 있다. 이는 강결합법의 변환 행렬이 업데이트된 고유값 벡터 행렬을 사용하면서 질량 직교성(mass orthonormality)이 발현되었기 때문이며, 따라서 우리는 오히려 강결합법에서의 최종 형태가 더 간결한 것을 확인할 수 있다. 그러나 이렇게 하나의 블록 행렬이 단순화된 것은 전체의 모델 축소 과정에서 매우 미미한 영향을 미치며, 결과적으로 약결합법 및 강결합법은 거의 동일한 계산 비용을 필요로 한다고 결론지을 수 있다.

6. 강결합법의 적용가능성에 대한 고찰

이 연구에서는 비대칭 공식 중에서도 (u, p) 공식에 대한 축소 모델링을 소개하였다. 이 강결합법은 또 다른 대표적인 비대칭 공식인 (u, φ) 공식, 또는 식 (3)과 같은 대칭 공식인 (u, p, φ) 공식의 축소모델링에도 적용될 필요가 있다. 이 장에서는 특히 (u, p, φ) 공식에서의 강결합법 적용 가능성과 해결해야 하는 연구 이슈를 정리하고자 한다.

이 연구에서 소개한 강결합법은 식 (1)에 표기된 표준 형태 공식을 기반으로 유도된 것이며, 현재 식 (2)로 표기된 형태에서는 그 성능이 발휘되지 못하고 있는 것으로 알려져 있다⁽¹²⁾. 이에 대하여 추가적인 연구가 필요한 상태이며, 아직까지 식 (3)으로 표현된 대칭 형태 공식으로의 확장은 시도되지 않았다. 이 논문에서는 식 (3)의 형태를 가지는 운동방정식에 해당하는 강결합법의 변환 행렬을 구하기 위한 사전 연구를 진행하고자 한다. 2개의 변수를 가지는 식 (1), 식 (2)와는 달리 식 (3)은 3개의 변수를 포함하고 있기

때문에, 총 2개의 구속 행렬이 존재한다. 먼저 식 (3)에서 질량 및 외력 효과를 제거하고, 첫 번째 행으로부터 아래의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{p}, \quad \Psi = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{H}, \quad (16)$$

그리고, 여기서 사용된 구속 행렬 Ψ 는 식 (6)과 완벽히 동일함을 확인할 수 있다. 또한, 식 (3)의 두 번째 행으로부터 아래와 같이 두 번째 구속 행렬을 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varphi} = \Upsilon \mathbf{p}, \quad \Upsilon = \mathbf{K}_f^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_f / \rho, \quad (17)$$

여기서 Υ 는 $\boldsymbol{\varphi}$ 와 \mathbf{p} 사이의 구속 행렬이다.

추가적으로, 대칭 형태의 운동방정식에 대한 강결합법 변환 행렬을 구하기 위해서 구조부와 유체부의 고유값 문제를 풀어야 한다. 그러나 식 (1) 또는 식 (2)에서 유체부와 구조부의 질량 및 강성 행렬이 깔끔하고 명확하게 표현되어 있는 것에 반해, 식 (3)의 대칭 형태 운동방정식에서는 유체부에서의 표현 형태가 불명확하다. 즉, 유체부에 해당하는 2개 변수 \mathbf{p} 와 $\boldsymbol{\varphi}$ 에 관한 고유값 문제를 잘 정의하고 분석할 필요가 있다. 만약 2개의 변수의 주요 고유값 벡터를 각각 $\boldsymbol{\Xi}_d^p$ 와 $\boldsymbol{\Xi}_d^\varphi$ 로 정의한다면, 우리는 대칭 형태의 운동방정식에 대하여 아래와 같은 약결합 변환 행렬을 제안할 수 있다.

$$\mathbf{T}_{symm-wc} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_d \Psi \boldsymbol{\Xi}_d^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_d^\varphi \\ \mathbf{0} & \Upsilon \boldsymbol{\Xi}_d^\varphi & \boldsymbol{\Xi}_d^\varphi \end{bmatrix}. \quad (18)$$

또한, 이러한 변환 행렬은 식 (11)과 유사하게 2개의 1차 및 2차 변환 행렬로 분할될 수 있고, 이를 이용하여 식 (1)과 같은 표준 형태를 대상으로 개발된 강결합법을 대칭형 운동방정식으로 확장할 수 있을 것으로 예상된다. 이러한 기법의 확장을 위해서 앞으로 대칭형 운동방정식에서의 유체부 고유값 문제를 정확하게 잘 고려하는 추가 연구가 필요할 것으로 생각된다.

아울러, 이 연구에서는 유체가 구조체 내부에 있는 경우(internal fluid-structure interaction)만을 고려한 강결합법을 다루었으나, 외부 유체를 고려하는 유체-구조 연성(hydroelastic) 및 자유수면(free surface)의 영향을 고려한 슬로싱(sloshing) 문제^(13,17) 등에도 해당 기술의 확장이 가능할 것으로 판단된다.

7. 수치 예제

7.1 Fluid Box Problem

이 단원에서는 널리 알려지고 검증된 간단한 수치 예제 모델을 이용하여 지금까지 다루었던 기법들의 성능을 비교한다. 먼저 Fig. 1에 보이는 유체가 담긴 2차원 상자 모델을 살펴보자.

이 모델의 상단부는 변형 가능한(deformable) 구조부로 이루어져 있고, 이를 제외한 나머지 3면은 변형되지 않는 강체 경계 조건을 가지고 있다. 구조부는 2개의 노드로 구성된 오일러-베르누이 빔 요소(Euler-Bernoulli beam element)가 20개 사용되었다. 유체부는 총 320개의 요소가 사용되었고, 각 요소는 4개의 노드로 구성되어 있다. 3면에 대한 강체 경계 조건을 제외한 추가 구속 조건은 부가하지 않았다.

구조부의 탄성계수는 210 GPa, 단면적은 0.02 m², 단면의 관성 모멘트는 1.59 × 10⁻⁴ kg/m², 밀도는 2500 kg/m³이다. 유체부의 밀도는 1000 kg/m³, 유체내에서의

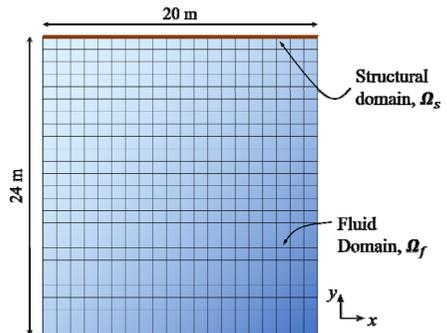


Fig. 1 Fluid box problem

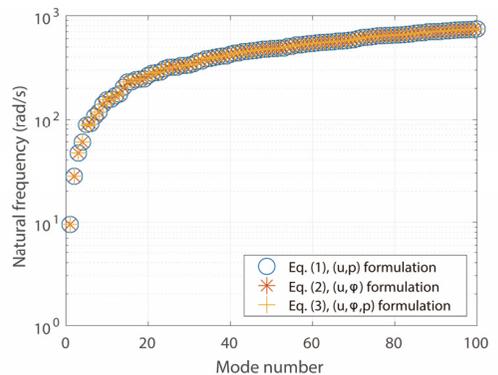


Fig. 2 Natural frequencies of the fluid-box problem

음속은 1500 m/s로 가정하였다.

Fig. 2는 식 (1)부터 식 (3)까지 정리된 3개의 운동 방정식들의 고유진동수(natural frequency)를 나타낸 것이다. 100개의 저차 변형 모드(deformable mode)만을 나타내었으며, 3개의 운동방정식이 모두 완벽하게 동일한 값을 나타내는 것을 확인할 수 있다. 즉, 어떠한 형태로 표현되더라도 이들 방정식은 모두 동일한 물리적 특성을 가진다.

Fig. 3은 전체 시스템에서 45개의 주요 모드를 선택하여 약결합법 및 강결합법을 이용하여 축소 모델을 생성하였을 때, 원본 모델과 축소모델 사이의 고유진동수 오차를 나타낸 그래프이다. 구조부와 유체부에서 각각 15개와 30개의 주요 모드가 선택되었다 ($n_s^d = 15, n_f^d = 30, n^d = 45$). 이때 i 번째 모드의 오차는 아래와 같이 정의된다.

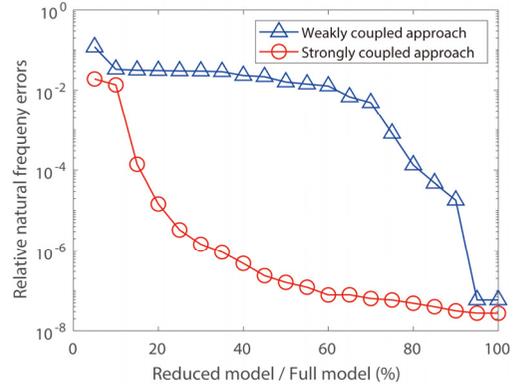
$$e_i = \frac{|\bar{\omega}_i - \omega_i|}{\omega_i}, \tag{19}$$

여기서 ω_i 와 $\bar{\omega}_i$ 는 원본 모델과 축소 모델의 i 번째 고유진동수를 나타낸다. Fig. 3으로부터 강결합법의 높은 정확도를 검증할 수 있다.

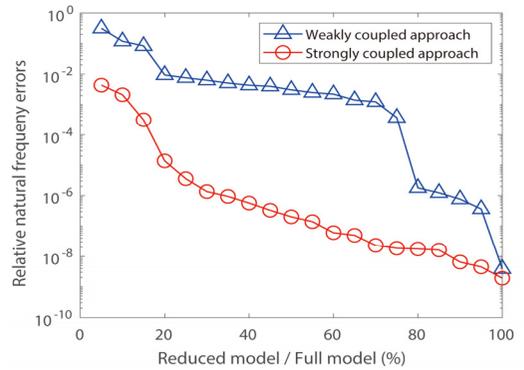
Fig. 4는 주요 모드의 개수를 늘려가면서 축소 모델의 크기를 키워갈 때, 모델의 10번과 20번 모드에서의 고유진동수 오차가 수렴해가는 과정을 나타낸다. 두 경우 모두 강결합 기법이 약결합법에 비해 빠르게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 또한, Fig. 5는 축소 모델들의 주파수 응답 함수(frequency response function,

FRF) 결과를 원래 모델의 FRF와 비교한 것으로, 강결합의 우수성을 확인할 수 있다.

마지막으로, 대칭형 공식을 행렬 응축을 이용하여 축소하였을 때, 두 시스템 행렬 사이의 상대 고유진



(a) Mode 10



(b) Mode 20

Fig. 4 Convergences of the natural frequency errors of the fluid box problem

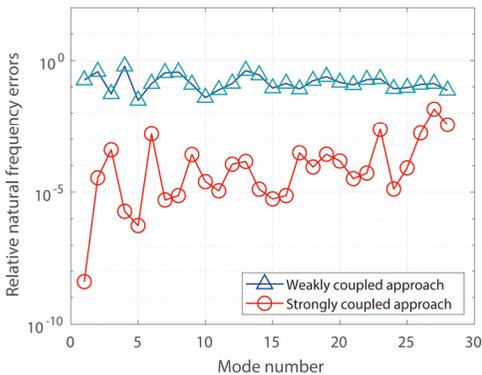


Fig. 3 Relative natural frequency errors of the fluid-box problem when 45 dominant modes are used with weakly and strongly coupled approach ($n_s^d = 15, n_f^d = 30$)

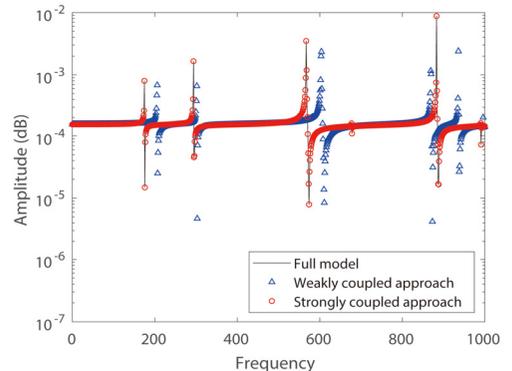


Fig. 5 Frequency response functions of the full and reduced models in fluid box problem

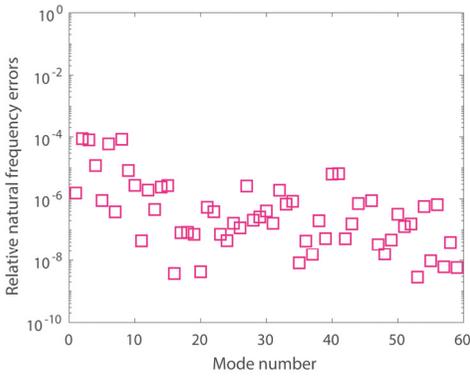


Fig. 6 Relative natural frequency errors of the symmetric FSI formulation after matrix condensation

Table 2 Size of the governing equations

Type	(u, p)	(u, p, φ)
DOFs of the structural domain	59	59
DOFs of the fluid domain	525	1050
DOFs of the full model	584	1109
DOFs of the reduced model	45	584

동수 오차를 살펴보았으며 이에 대한 결과가 Fig. 6에 나타나 있다. 대칭형 공식의 행렬 응축 기법은 약결합법 및 강결합법에 비해 저차에서부터 우수한 고유진동수 오차를 보이나, 반복법 적용의 어려움과 축약에 소요되는 계산시간 등을 고려할 때 활용성에 어려움이 있다. 각 기법의 축소기법 적용 후 시스템의 크기를 Table 2에서 정리하였다.

Table 2로부터, 대칭형 공식의 행렬 응축 결과는 비대칭형 공식의 원본 모델의 시스템 크기와 동일한 것을 확인할 수 있다.

또한, 기존 유체부와 업데이트된 유체부의 모드 형상(mode shape)을 비교해보면 Fig. 7과 같다. 모드 1과 2에 대하여 모드 형상을 비교해보면, 강결합법에서는 구조부의 영향이 추가되어 유체부의 모드 형상이 변화된 것을 확인할 수 있다.

마지막으로, 5단원에서 정의한 각 기법들의 계산비용 분석을 이 예제를 이용하여 수행하였다. 이의 비교 결과는 Fig. 8과 같다. 약결합법 및 강결합법은 서로 대동소이한 결과를 나타냈고, 행렬 응축 방식은 매우 높은 결과를 나타냈는데, 이는 Table 1에서 볼 수 있듯이, 계산 과정에서 큰 값을 가지는 전체 도메인의 크기, n_s 와 n_f 가 응축 과정에서 사용되었기 때문이다.

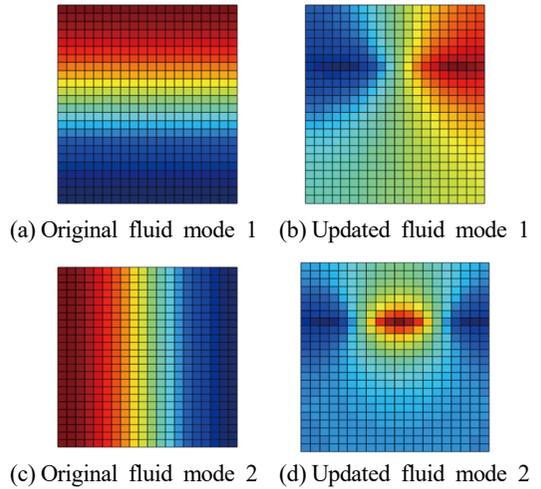


Fig. 7 Original and updated fluid mode shapes

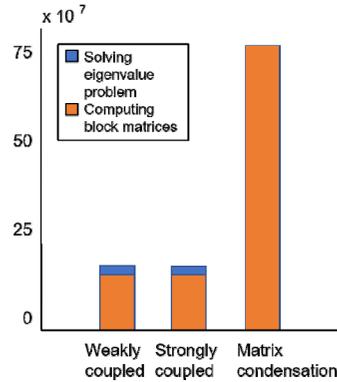


Fig. 8 Computational costs of three methods

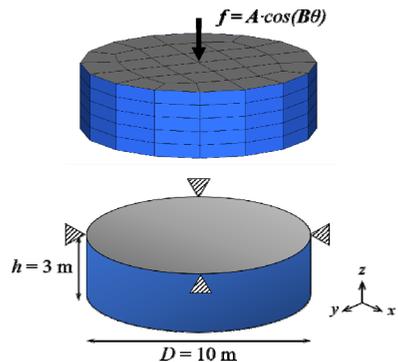


Fig. 9 Fluid in a cylinder problem

7.2 Fluid Cylinder Problem

Fig. 9와 같은 원기둥 속 유체와 이를 덮고 있는 합판으로 이루어진 모델을 살펴보자. 구조부는 노드당

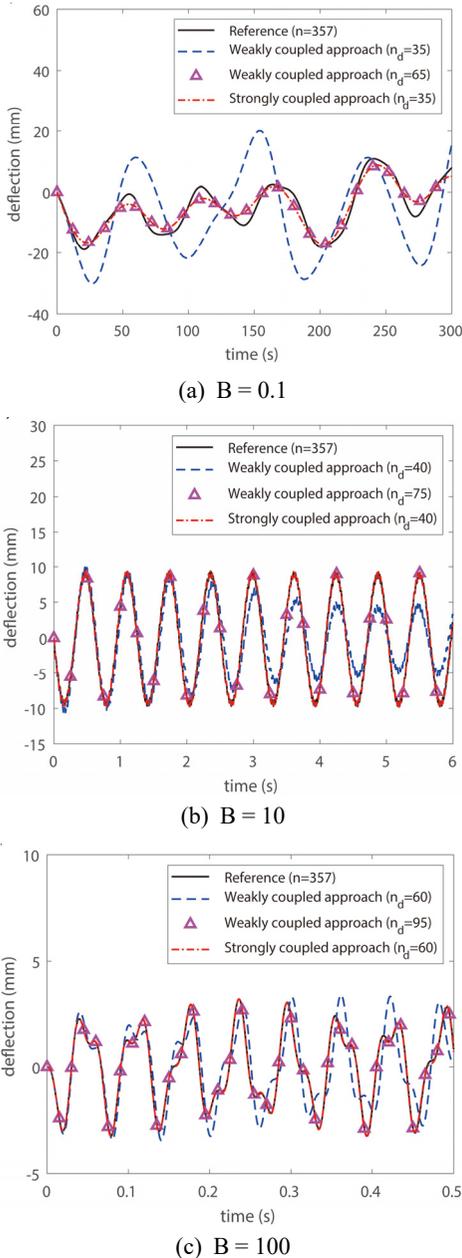


Fig. 10 Deflections of the center point in the structural domain

3개의 자유도를 가지는 32개의 4절점 플레이트 요소로 구성되고, 유체부는 8절점 6면체 요소가 160개 사용되었다. 모델에 사용된 물성치는 이전 예제와 동일하며, 합판의 두께는 1 cm로 적용하였다.

이 예제에서는 응답 해석을 수행하여 원본 모델과 축소 모델의 정확도를 비교하고 하중의 주파수에 따

Table 3 Size of the full and reduced models

	Full model	Weakly coupled ROM ($n_s^d + n_d^d$)	Strongly coupled ROM ($n_s^d + n_d^d$)
B = 0.1	357 (111 + 246)	65(25 + 40)	35(15 + 20)
B = 10		75(30 + 45)	40(15 + 25)
B = 100		95(40 + 55)	60(20 + 40)

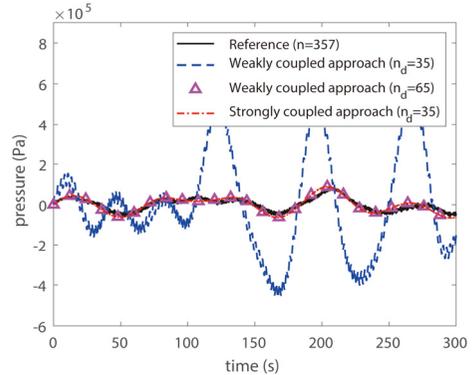


Fig. 11 Pressure variations at the center of fluid domain

른 기법들의 성능 비교를 진행하였다. Fig. 7과 같이 구조부의 대칭 위치 4지점의 자유도를 완전히 고정하였고, 구조부의 정중앙부에 $A \cos(B\theta)$ N의 힘을 가하였다. 이 때 $A = 10^6$ 이며 B는 0.1, 10, 50의 3가지 경우의 해석을 진행하였다.

Fig. 10은 3가지의 하중 주파수에 하중점의 z방향 변형을 나타낸 그래프이다. 원본 모델과 축소 모델의 결과가 모두 정리되었으며, 같은 수의 주요 모드가 사용되는 경우, 항상 강결합법이 약결합법에 비하여 뛰어난 성능을 나타냈다. 약결합법으로 생성한 축소 모델이 강결합법과 유사한 성능을 나타내기 위해서는 더 많은 주요 모드를 필요로 했다.

이 때 두 모델 축소 기법을 이용하여 생성한 축소 모델의 크기를 비교하면 Table 3과 같다. 유사한 정확도를 가지는 축소 모델을 생성하기 위해서 약결합법이 훨씬 많은 주요 모드를 필요로 한다는 것을 확인할 수 있다.

구조부에서의 변형 외에 유체부에서의 압력 변화 역시 분석되었다. Fig. 11은 유체부의 중앙부 $h = 1.8$ 인 지점에서 각 모델의 시뮬레이션 결과이며 Fig. 10과 유사한 경향성을 나타냄을 확인할 수 있다.

8. 결 론

이 연구에서는 최근에 개발된 유체-구조간 결합된 모델에서의 모델 축소 기법 필요성을 소개하고, 최근 까지 개발되어온 여러 모델 축소 기법들 혹은 행렬 응축을 이용하여 실제 수치 예제에 적용하고 정확도를 비교하였다. 최근에 개발된 강결합법은 기존에 존재하던 약결합법의 축소 과정을 2개의 단계로 분할하여 유체부와 구조부의 순차적 축소 개념을 응용한 것으로 가장 뛰어난 성능을 나타냈다. 행렬 응축 방식의 경우, 시스템의 축소 효율은 낮았지만 모드 투영 기법들과는 다르게 유체 및 구조부의 고유값 문제를 계산할 필요가 없다는 장점을 가지고 있다. 이러한 장단점을 바탕으로 사용자가 적합한 시스템 축소를 진행할 수 있을 것으로 생각된다. 아울러 해당 기술의 확장 발전을 통해 현업에서 사용되는 다양한 실제구조물의 구조-음향 해석 정확도 및 효율성 향상 및 현재 개발된 관련 상용 소프트웨어의 성능향상에도 기여할 수 있을 것이라 판단된다.

후 기

This research was supported by the Basic Science Research Programs through the National Research Foundation of Korea funded by the Ministry of Science, ICT, and Future Planning(NRF-2018R1A1A1A05078730, NRF-2018K2A9A1A06069632, NRF-2016R1A2B4013885).

References

(1) Ham, H. J. and Park, J. H., 2019, A Study on the Identification and Evaluation of Vehicle BSR Noise Generation Mechanism, *Journal of KSNVE*, Vol. 29, No. 2, pp. 18~21.

(2) Jeong, Y.-S., Eem, S.-H., Jeon, B.-G. and Park, D.-U., 2019, Comparison of Response of Battery Charger in Nuclear Power Plant Depending on Frequency Characteristics in Seismic Motions, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 29, No. 1, pp. 120~130.

(3) Woo, S. H., 2017, Prediction and Ground Verification of Detachment Impact Response of Satellite, *Journal of KSNVE*, Vol. 27, No. 1, pp. 12~19.

(4) Kang, S.-J. and Lee, D. H., 2018, Fluid-structure Coupled Analysis of Cochlear Responses with Transverse Isotropic Basilar Membrane, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 28, No. 1, pp. 14~22.

(5) Zienkiewicz, O. C. and Bettess, P., 1978, Fluid-structure Dynamics Interaction and Wave Forces, *An Introduction to Numerical Treatment*, *International Journal of Numerical Methods and Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 1~16.

(6) Kim, J. G., Han, J. B., Lee, H. and Kim, S. S., 2018, Flexible Multibody Dynamics Using Coordinate Reduction Improved by Dynamic Correction, *Multibody System Dynamics*, Vol. 42, No. 4, pp. 411~429.

(7) Kim, J. G., Park, Y. J., Lee, G. H. and Kim, D. N., 2017, A General Model Reduction with Primal Assembly in Structural Dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 324, pp. 1~28.

(8) Kim, J. G. and Lee, P. S., 2015, An Enhanced Craig-Bampton Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 103, No. 2, pp. 79~93.

(9) Kim, S. M., Kim, J. G., Chae, S. W. and Park, K. C., 2016, Evaluating Mode Selection Methods for Component Mode Synthesis, *AIAA Journal*, Vol. 54, No. 9, pp. 2852~2863.

(10) Kim, S. M., Kim, J. G., Park, K. C. and Chae, S. W., 2018, A Component Mode Selection Method Based on a Consistent Perturbation Expansion of Interface Displacement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 330, pp. 578~597.

(11) Kim, S. M., Kim, J. G., Park, K. C. and Chae, S. W., 2019, Iterative Component Mode Synthesis Using a Priori and a Posteriori Criteria, *AIAA Journal*, Vol. 57, No. 5, pp. 2145~2157.

(12) Kim, S. M., Kim, J. G., Chae, S. W. and Park, K. C., 2019, A Strongly Coupled Model Reduction of Vibro-acoustic Interaction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 347, pp.

495~516.

(13) Morand, H. J. P. and Ohayon, R., 1995, Fluid Structure Interaction-applied Numerical Methods, Wiley.

(14) Sandberg G. and Goransson, P., 1988, A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-structure Interaction Analysis, Journal of Sound Vibration, Vol. 123, pp. 507~515.

(15) Olson, L. G. and Bathe, K. J., 1985, Analysis of Fluid-structure Interactions: a Direct Symmetric Coupled Formulation Based on the Fluid Velocity Potential, Computers and Structures, Vol. 21, No. 1-2, pp. 21~32.

(16) Everstine, G. C., 1981, A Symmetric Potential Formulation for Fluid-structure Interaction, Journal of Sound Vibration, Vol. 79, No. 1, pp. 157~160.

(17) Lim, J. H., Hwang, D. S., Kim, K. W., Lee, G. H. and Kim, J. G., 2017, A Coupled Dynamic Loads Analysis of Satellites with an Enhanced Craig-bampton Approach, Aerospace Science and Technology, Vol. 69, pp. 114~122.



Soo Min Kim received his B.S, M.S and Ph.D. degrees in Department of Mechanical Engineering from Korea University in 2011, 2013 and 2018 respectively. He is currently a staff engineer of Samsung SDI.



Jin-Gyun Kim received his B.S and M.E degrees in Civil Engineering from Korea University in 2008 and 2010, respectively, and his Ph.D. in ocean systems engineering from Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST) in 2014. He worked as a senior researcher in Korea Institute of Machinery and Materials (KIMM) from 2014 to 2017. He is currently an Assistant Professor of Kyung Hee University of Mechanical Engineering.