



# 시간 영역 설계 사양을 위한 강인한 P<sup>2</sup>/LTR 제어

## Robust P<sup>2</sup>/LTR Control for Time Domain Design Specification

서 상 민<sup>†</sup>  
SangMin Suh<sup>†</sup>

(Received May 27, 2019 ; Revised July 22, 2019 ; Accepted July 22, 2019)

**Key Words :** Model Uncertainty(모델 불확실성), LQG/LTR, Pole Placement(극점 배치법), P<sup>2</sup>/LTR, Robustness (강인성)

### ABSTRACT

Linear quadratic Gaussian/loop transfer recovery (LQG/LTR) is a robust control design method in the frequency domain. However, the method does not consider time-domain design specifications such as overshoots or vibrations. This paper proposes pole placement/loop transfer recovery (P<sup>2</sup>/LTR) to satisfy the time-domain design specifications that include frequency domain design specifications. The time-domain design specifications are met by the design of the target loop function, whereas the frequency domain constraints are satisfied via loop transfer recovery. In the presence of model uncertainty, robustness is also proved; therefore, it is confirmed that this method is valid and effective in real-world applications.

### 1. 서 론

여러 산업기기분야에서 모터는 가장 널리 사용되고 있는 부품이다. 그리고 전체 시스템의 성능에 영향을 주는 큰 요인 중 하나는 진동이며, 그 진동을 최대한 줄이는 것이 성능 향상에 많은 도움을 준다. 이러한 진동은 크게 두 가지로 분류가 되는데, 하나는 외부에서 인가되는 진동이고, 다른 하나는 모터 자체의 진동 모드에 의해 야기된 것이 있다.

외부에서 인가된 진동을 제거하는 방법으로 외란 관측기(disturbance observer)가 널리 사용되고 있다<sup>(1)</sup>. 외란 관측기는 외부에서 인가된 외란을 측정하여 인가된 외란 만큼을 되먹임 하여 그 외란을 보상하는 방법이다. 전통적인 외란 관측기는 주파수 영역에서 설계를 하는데, 기존과 다르게 상태 변수를 이용할

수 있는 상태 공간에서의 외란 관측기가 개발되었다. 하나는 병렬 구조를 이용하여 기존의 상태공간에서의 설계가 유지된 상태에서 외란 제거를 할 수 있는 구조<sup>(2)</sup>와 추정 오차(estimation error)를 이용한 새로운 형태의 외란 관측기<sup>(3)</sup>가 제안되었다.

모터 내부의 진동을 줄이기 위한 일반적인 방법은 극점 배치법(pole placement)을 이용하여 감쇠 계수(damping coefficient)를 조절하는 것이다<sup>(4,5)</sup>. 그러나, 이러한 일반적인 극점 배치법은 모델 불확실성(model uncertainty)에 대한 안정도 강인성(robust stability)을 보장하지 못한다. 이러한 안정도 강인성을 보장하는 방법으로 LQG/LTR(linear quadratic gaussian/loop transfer recovery)이 개발되었으며<sup>(6,7)</sup>, 비록 오래전에 개발된 방법론이지만, 지금까지도 널리 사용되고 있는 방법으로, HDD(hard disk drives) 제어와<sup>(8)</sup> 전력 변환<sup>(9)</sup> 등에서 아직도 많은 연구가 진행 중이다. 또한

<sup>†</sup> Corresponding Author ; Member, Samsung Electronics  
E-mail : sangmin.suh@samsung.com

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Jun Hong Park  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

최근에는 제조 공정에서 사용되는 4.탱크 시스템 (quadruple tank system)<sup>(10)</sup>과 전력 계통의 광역 감쇠 제어기(WADC: wide area damping controller)<sup>(11)</sup>에도 응용이 되고 있다.

그러나, 기존의 LQG/LTR은 주파수 영역에서의 설계이기 때문에, 진동 모드를 억제하기 위한 시간영역에서 직접적인 설계는 할 수가 없었다. 따라서, 시간 응답 특성이 중요한 분야에서는 시간 응답을 조절할 수 있는 간접적인 새로운 변수를 도입하기도 하였다<sup>(8)</sup>. 실제 HDD의 경우 오버슈트가 있으면 다른 데이터 트랙의 정보를 지우기 때문에 오버슈트가 최소화되어야 하며, 진동에 의한 긴 정착시간(settling time)은 정보의 읽기/쓰기(read/write) 성능의 심각한 저하를 일으킨다. 최근에는 LQG/LTR에서 진동 억제를 위한 시간 영역에서 직접적인 설계 방법이 제시되었다<sup>(12)</sup>. 여기서, 추정기 이득(estimator gain)을 조절하여 목표 페루프 전달 함수를 일차 함수가 되도록 하여, 루프 전달 회복(loop transfer recovery)에서 진동이 없도록 제어를 설계하였다. 그러나, 일차 페루프 시스템을 설계함으로써 진동이 발생하는 것은 억제하였으나, 여민감도 함수(complementary sensitivity)의 주파수 응답의 경사가 저주파영역에서 -20 dB/decade 밖에 되지 않아서 외부 진동과 외란 제거 성능이 떨어질 수 밖에 없었다.

이 논문은 주파수영역에서의 설계 방법인 LQG/LTR의 시간 영역에서의 설계 제약을 해결하고, 기존 방법<sup>(12)</sup>의 외부 외란과 진동 제거 성능을 함께 개선하고자 한다. 저주파 영역에서 여민감도(complementary sensitivity) 함수의 경사를 -40 dB/decade가 되도록 설계하여 외부의 진동과 외란에 의한 영향을 줄이고, 동시에 모터의 내부 진동 모드도 함께 줄일 수 있는 방법을 제시한다. 또한, 제안하는 방법은 기존의 LQG/LTR이 가지고 있는 안정도 강인성도 유지됨을 보인다.

## 2. 플랜트 모델링

플랜트의 모델을 위하여, 동적 신호 측정기(DSA: dynamic signal analyzer)와 레이저 도플러 진동계(LDV: laser doppler vibrometer)를 이용하여 주파수 응답을 측정하였다.

그리고, 측정된 주파수 응답 특성으로부터 식 (1)과

같은 수학적 모델을 계산하였다.

$$G_p(s) = G_n(s) \cdot G_{res}(s) \\ = \left( G_v \cdot \frac{K_t}{J_m} \cdot \frac{1}{s^2} \right) \cdot \left( \frac{\omega_p^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2} \right) \quad (1)$$

여기서  $G_n(s)$ 는 공칭 모델(nominal model)을,  $G_{res}(s)$ 는 모터의 진동 모드를 나타낸다.  $G_v$ ,  $K_t$ ,  $J_m$ ,  $\omega_p$ ,  $\zeta_p$ 는 각각 드라이버 게인, 토크 상수(torque constant), 관성(inertia), 감쇠 계수(damping constant), 자연 공진주파수(natural resonance frequency)를 나타낸다. 제어기 설계를 위한 공칭 모델은 다음과 같이 상태공간으로 표현된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + G_1w(t) \\ y(t) = Cx(t) + G_2v(t) \quad (2)$$

여기서,  $w(t)$ ,  $v(t)$ 는 프로세스 잡음과 측정 잡음이며,  $G_1$ ,  $G_2$ 는 각 잡음이 프로세스와 출력에 얼마나 영향을 주는 것인가를 나타내는 이득이다. 이 논문에서, 공칭 모델  $G_n(s)$ 는 제어기 설계를 위하여 사용되고, 진동 모드까지 고려한  $G_p(s)$ 는 성능 분석을 위해 사용된다.

## 3. P<sup>2</sup>/LTR 제어기 설계

전통적인 LQG/LTR에서는 목표 루프 전달 함수(target loop transfer function)와 루프 전달 회복(loop transfer recovery)을 모두 주파수 영역에서 설계하여,

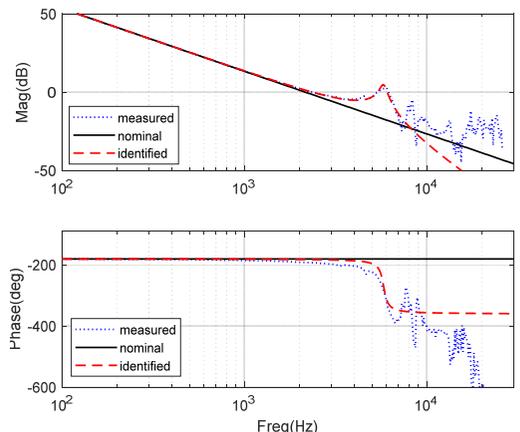


Fig. 1 Plant dynamics

시간 영역에서의 설계 사양(design specification)은 고려될 수 없었다. 이 논문에서는, 그러한 시간 영역에서의 설계 사양을 고려하기 위하여 목표 루프 전달 함수를 시간영역에서 직접 설계한다. 목표 루프 전달 함수와 루프 전달 회복을 위해 다음과 같은 상태 추정기를 사용한다<sup>(4)</sup>.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ u(t) &= -K\bar{x}(t)\end{aligned}\quad (3)$$

여기서  $K$ ,  $L$ 은 각각 상태 케환 이득과 추정기 이득이다.

### 3.1 시간영역에서 목표 루프 전달 함수 설계

목표 전달 함수를 설계하기 위하여 Fig. 2와 같은 상태 케환 시스템을 고려한다. 목표 전달 함수는 플랜트 입력에서 정의될 수도 있고 플랜트 출력에서도 정의될 수 있는데<sup>(13)</sup>, 이 논문에서는 플랜트 입력에서 정의되었다.

그 이유는 제어기 이득을 계산할 때, 시간 영역에서 설계 사양을 고려하기 위함이다. 즉, 목표 전달 함수 자체를 시간영역에서 설계함으로써, 루프 전달 회복을 통하여 진동이 잘 조절된 폐루프 시스템을 얻고자 한다. Fig. 2에서 정의된 목표 전달 함수  $G_t(s)$ 는 다음과 같이 계산되며

$$G_t(s) = K(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

이 논문에서는 표준 LQG/LTR과 다르게,  $G_t(s)$ 를 시간 영역에서 설계한다.

주어진 플랜트 ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ )에 대하여 극점배치법을 사용하며, 2차 시스템의 경우는 식 (5)와 같은 관계식으로 근사화된다.

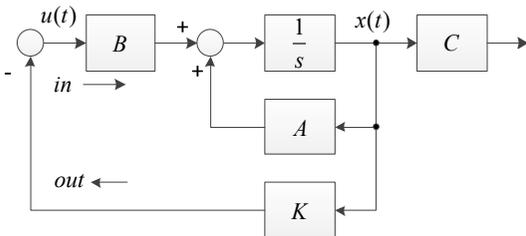


Fig. 2 Loop gain with full state feedback

$$\begin{aligned}\zeta\omega_n t_s &\cong 4.6 \\ \Leftrightarrow \omega_n &\cong \frac{4.6}{\zeta t_s}\end{aligned}\quad (5)$$

여기서  $\zeta, \omega_n, t_s$ 는 감쇠 계수, 자연 주파수, 그리고 정착 시간(settling time)이다. 여기서 주의할 점은 감쇠 계수와 정착 시간은 분명히 시간영역에서의 설계 사양이다. 위의 계수들을 이용하여, 목표 폐루프 시스템의 극점은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}0 < \zeta \leq 1 : p_1, p_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \zeta > 1 : p_1, p_2 &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}\end{aligned}\quad (6)$$

위에서 설계된 두 개의 극점은 목표 폐루프 시스템의 시간 응답을 결정짓고, 그러한 두 개의 극점을 갖는 제어 이득  $K$ 는 극점배치법을 이용하여 설계한다<sup>(4,5)</sup>.

### 3.2 루프 전달 회복 설계

루프 전달 회복을 위한 추정기 이득  $L$ 은 식 (7)과 같으며

$$L = PC^T(\rho^{-1}R)^{-1} \quad (7)$$

$P$ 는 다음의 대수 리카티 방정식(ARE: algebraic riccati equation)의 해이다.

$$AP + PA^T + Q - PC^T(\rho^{-1}R)^{-1}CP = 0 \quad (8)$$

여기서,  $Q = G_1 G_1^T = BB^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 은 프로세스 잡음 공분산 행렬이고,  $R = \rho^{-1} G_2 G_2^T = \rho^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 은 측정 잡음 공분산 행렬이다.

그리고, 식 (3)을 변형하면 제어기  $u(t)/y(t)$ 는 다음과 같고

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ &= A\bar{x}(t) + BK\bar{x}(t) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ &= (A - BK - LC)\bar{x}(t) + Ly(t)\end{aligned}\quad (9)$$

$$u(t) = -K\bar{x}(t)$$

이를 주파수 영역에서 표현하면 다음과 같다.

$$G_c(s) = K(sI - AK - LC)^{-1}L \quad (10)$$

그러면, 개루프 전달 함수는  $G_{ol}(s) = G_p(s) \cdot G_c(s)$  으로 계산된다. 루프 전달 회복은 식 (8)의  $\rho$ 에 의하여 조절될 수 있으며, Fig. 3의 주파수 특성과 Fig. 4의 시간 응답 특성을 모두 고려하여 선택한다.

Fig. 4를 보면 목표 페루프 시스템의 오버슈트가 최소가 되도록 설계하였기 때문에, 루프 전달 회복을 통하여 실제로 설계된 페루프 시스템의 시간응답에는 빠른 응답에도 불구하고 오버슈트는 거의 보이지 않는다. 다만 루프 전달 회복을 강하게 하였을 때는, 플랜트에 내재된 진동 모드  $G_{res}(s)$ 에 의한 진동은 관찰된다.

여러 가지  $\rho$ 를 적용하였을 때 설계된 민감도 함수 (sensitivity function)와 여민감도 함수(complemen-

tary sensitivity)는 Fig. 5에서 보인다. 과도한 루프 전달 회복은 플랜트의 진동 모드를 자극하여 시간응답 특성을 열화시키기 때문에, 그러한 과도하게 큰  $\rho$ 는 선택하지 않는다.

여기서 설계된 민감도 함수를 보면, 저주파 구간에서는  $-40$  dB/decade의 경사를 갖는다. 이는 시간 응답 특성 개선을 위한 과거에 제안한 설계 방법<sup>(12)</sup>과는 분명히 다르다. 기존의 방법에서는 진동을 줄이기 위하여 목표 페루프 시스템을 1차 함수로 만들었다. 이는 목표 여민감도 함수의 저주파 특성이  $-20$  dB/decade로 제한됨을 의미하고, 따라서 저주파 구간에서 외부의 외란이나 진동의 제거 성능이 지금 제안하는 방법보다는 떨어진다는 것을 의미한다.

이 논문에서 제안하는 방법은 시간 응답 특성도 고려하여 설계할 수도 있다는 점에서 기존의 LQG/LTR과는 분명히 다르다. 물론 일반 LQG/LTR에서도  $\rho$ 값을 조절하여 시간 응답 특성을 느리게 함으로써 오버슈트(overshoot)를 약간 줄일 수도 있을 것이다. 그러나, 목표 전달 함수에서 오버슈트를 줄일 수는 없기 때문에 설계된 페루프 시스템에서도 오버슈트는 나타날 수밖에 없다.

### 3.3 일반 LQG/LTR과 비교

전통적인 방법의 목표 전달 함수의 제어기 이득은 다음과 같이 계산된다.

$$K = (\alpha^{-1}R)^{-1}B^TP_c \tag{11}$$

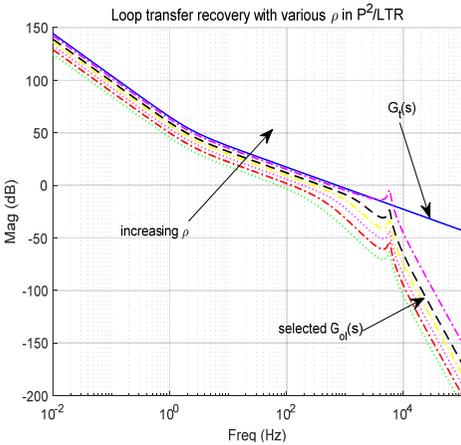


Fig. 3 Loop transfer recoveries for different  $\rho$  values in P<sup>2</sup>/LTR

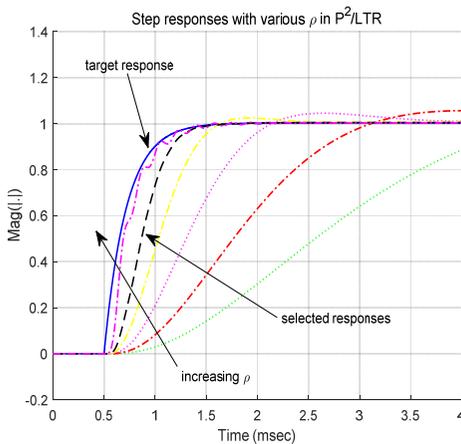


Fig. 4 Step responses for different  $\rho$  values of (8) in P<sup>2</sup>/LTR

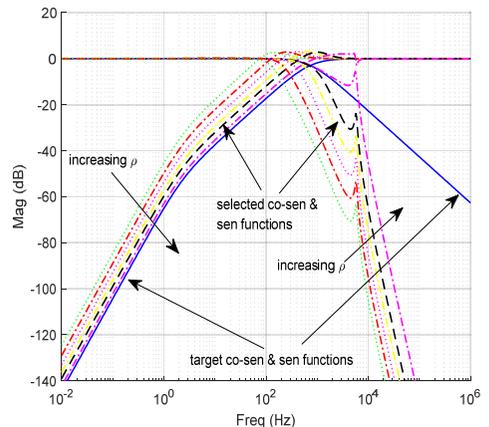


Fig. 5 Sensitivity and co-sensitivity functions in P<sup>2</sup>/LTR

여기서  $P_c$ 는 다음의 대수 리카티 방정식(ARE: algebraic riccati equation)의 해이다.

$$A^T P_c + P_c A + Q_c - P_c B (\alpha^{-1} R)^{-1} B^T P_c = 0 \quad (12)$$

여기서,  $Q = G_1 G_1^T = B B^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 은 프로세스 잡음 공분산 행렬이고,  $R = \alpha^{-1} G_2 G_2^T = \alpha^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 은 측정 잡음 공분산 행렬이다.

Fig. 6은 여러 가지  $\alpha$ 를 적용하였을 때의 목표 페루프 시스템의 시간응답이다. 일반 LQG/LTR의 목표 응답에서는 오버슈트를 줄일 수가 없고, 이러한 목표 페루프 시스템의 특성은 나중에 루프 전달 회복시에도 그대로 나타나게 된다. 일단 목표 전달 함수에서 오버슈트가 존재하게 설계가 되면, 루프 전달 회복에

서도 오버슈트가 존재하는 목표 전달 함수에 수렴하게 하며, 계단 응답 초기에 발생된 강한 고주파 성분이 결국 고주파 진동을 야기시키게 되며 이러한 현상은 Fig. 7에서 보이고 있다.

이러한 진동을 줄이기 위해선, Fig. 6에서 고주파 성분이 덜 야기 되도록 좀 더 느린 시간 응답 특성의 목표 전달 함수를 선택할 수도 있을 것이다. 그러나, 그 목표 전달 함수조차도 이미 오버슈트를 가지기 때문에, Fig. 4와 같은 페루프 응답 특성을 얻을 수는 없다.

#### 4. 안정도 강인성

제어기 설계에 사용된 수학적인 플랜트 모델은 실제 플랜트와 차이가 있고, 그러한 불확실성이 존재할 때 안정도를 확인하고자 한다.

**정리: 스몰 게인 이론(small gain theorem)**

불확실성이  $|\Delta|_\infty < 1$ 을 만족하고 공칭 페루프 시스템이 안정하며 식 (13)을 만족한다면, Fig. 8에서 나타내는 페루프 시스템은 항상 안정(stable)하다<sup>(14)</sup>.

$$\|N_{Y_d W_d}\| = \sup_{\omega} \{ \bar{\sigma} [N_{Y_d W_d}(j\omega)] \} < 1 \quad (13)$$

Fig. 1을 보면, 모델 불확실성은 5 kHz 이상에서 많이 나타나며 100 Hz 이하에서는 거의 나타나지 않는다. 그러므로 이 논문에서는 다음과 같은 덧셈형 불확실성을 정의하여 안정도 강인성을 분석한다.

$$W(s) = g \cdot \frac{s/z + 1}{s/p + 1} \quad (14)$$

여기서,  $g, z, p$ 는 각각 불확실성 주파수 영역의 이득,

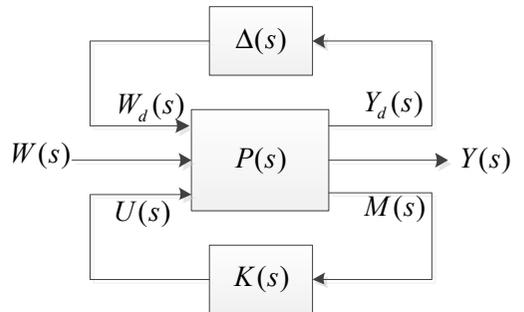


Fig. 8 Unstructured uncertainty model for robustness analysis

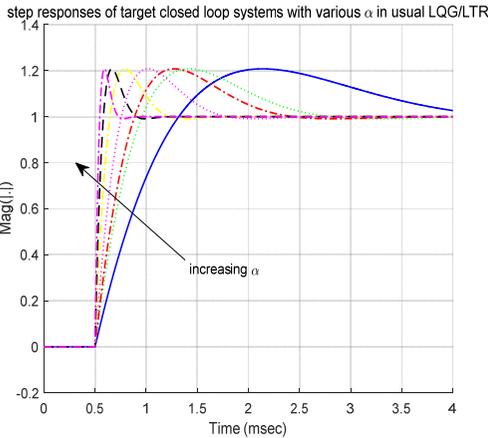


Fig. 6 Target responses for different  $\alpha$  values of (12) in LQG/LTR

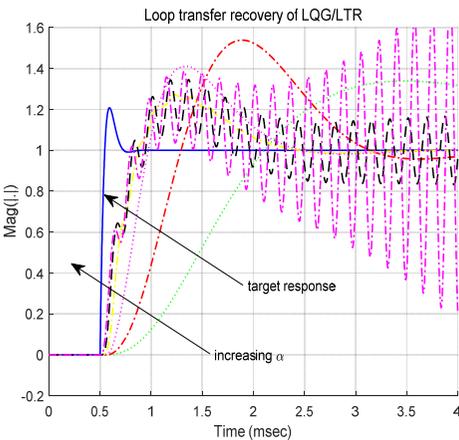


Fig. 7 Designed responses for different  $\alpha$  values in LQG/LTR

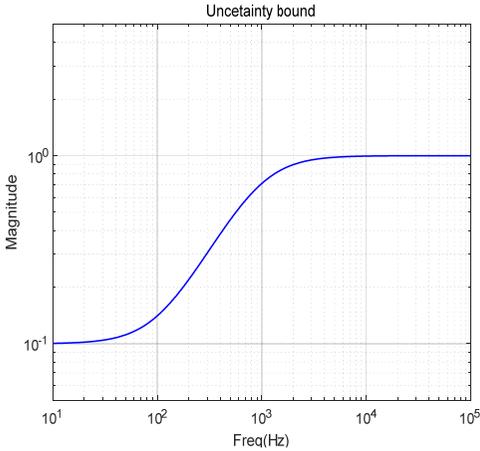
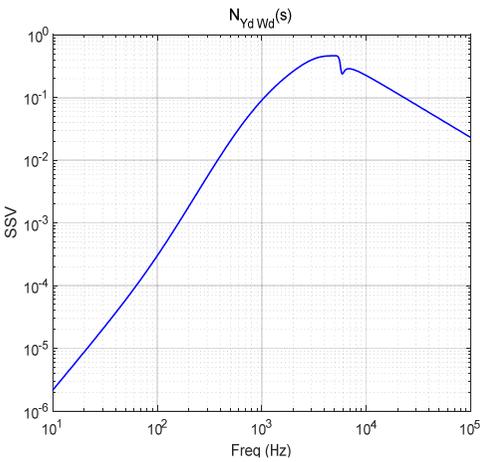


Fig. 9 Uncertainty bound

Fig. 10 Plot of  $\bar{\sigma}[N_{Y_d W_d}(j\omega)]$ 

영점, 극점이고 Fig. 8에 표현하였다. 이 함수는 100 Hz 이하의 영역에서의 불확실성은 10% 이내로, 1 kHz 이상에서는 100% 이내로 불확실성이 존재한다고 가정하고 설계였다. 이러한 설계 파라미터를 이용한 식 (14)의 주파수 응답을 Fig. 9에 보인다.

Fig. 8에서,  $N_{Y_d W_d}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} N_{Y_d W_d}(s) &= -\frac{W(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_c(s)} \\ &= -\frac{W(s) \cdot K(sI - AK - LC)^{-1}L}{1 + C(sI - A)^{-1}B \cdot K(sI - AK - LC)^{-1}L} \end{aligned} \quad (15)$$

그리고 식 (15)를 이용하여 모든 주파수 구간에서

의 측정된 응답특성을 Fig. 10에서 보인다. 측정된 주파수 응답의 크기는 모든 주파수 영역에서 1보다 작으므로 식 (13)을 만족하고, 이는 제안한 방법은 안정도 강인성을 유지한다고 말할 수 있다.

## 5. 결론

LQG/LTR은 고주파 성분의 불확실성을 억제하여 안정도 강인성을 얻을 수 있는 주파수 영역에서의 설계 방법이다. 이러한 특징 때문에 설계된 페루프 시스템의 특성은 시간 영역에서 설계 파라미터를 만족시키는데 한계가 있다. 이 논문은 그러한 한계를 극복하고자 새로운 방법인 P<sup>2</sup>/LTR(pole placement/ LTR)을 제안하였다. 여기서 제안하는 방법은 주파수 영역과 시간영역에서의 설계 사양을 동시에 만족시킬 수가 있다.

이 논문에서 목표 전달 함수는 시간 영역에서 설계 사양을 만족하도록 설계하여, 진동이나 오버슈트가 최소화되도록 설계하였다. 이는 나중에 루프 전달 회복 과정에서 진동이 최소화되도록 하기 위함이다. 그리고, 주파수 영역에서 루프 전달 회복을 이용하여 안정도 강인성을 획득하였다. 또한 덧셈형 불확실성을 설계된 공칭 모델에 적용하여 설계된 제어기가 안정도 강인성을 유지함을 보였다.

## References

- (1) Ohnishi, K., 1987, A New Servo Method in Mechatronics, Trans. of Japanese Society of Electrical Engineers, Vol. 177-D, pp. 83~86.
- (2) Suh, S. M., 2010, Unified H<sup>∞</sup> Control to Suppress Vertices of Plant Input and Output Sensitivity Function, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 18, No. 4, pp. 969~975.
- (3) Suh, S. M., 2018, Estimation Error Based Disturbance Observer Design for Flexible Loop Shaping, Electronics, Vol. 7, No. 12, pp. 358~371.
- (4) Franklin, G. F., Powell, J. D. and Emami-Naeini, A., 2002, Feedback Control of Dynamic Systems, 4th Edition, Prentice-Hall.
- (5) Kuo, B. C., 1987, Automatic Control Systems, 5th Edition, Prentice-Hall.
- (6) Athans, M., 1986, A Tutorial on the LQG/LTR

Method, Proceeding of the American Control Conference, Seattle, WA, pp. 1289~1296.

(7) Stein, G. and Athans, M., 1987, The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 32, No. 2, pp. 105~114.

(8) Suh, S., Chung, C. C. and Lee, S.-H., 2001, Discrete-time LQG/LTR Dual-stage Controller Design in Magnetic Disk Drives, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 37, No. 4, pp. 1891~1895.

(9) Andani, M. T., Pourgharibshahi, H., Ramezani, Z. and Zargarzadeh, H., 2018, Controller Design for Voltage-source Converter Using LQG/LTR, IEEE Texas Power and Energy Conference.

(10) Neves, G. P., Barbosa, F. S., Costa, P. S. and Angélico, B. A., 2016, Discrete Time LQG/LTR Applied to a Practical Quadruple Tank System, IEEE Conference on Control Applications.

(11) Bhadu, M., Senroy, N., Kar, I. N. and Sudha, G. N., 2015, Robust Linear Quadratic Gaussian-based Discrete Mode Wide Area Power System Damping

Controller, IET Generation, Transmission & Distribution, Vol. 10, No. 6, pp. 1470~1478.

(12) Suh, S. M., 2010, Vibration-free Control of Double Integrator Typed Motor via Loop Transfer Recovery, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 10, pp. 900~906.

(13) Lewis, L. L., 1992, Applied Optimal Control and Estimation, Prentice-Hall2.

(14) Burl, J. B., 1999, Linear Optimal Control, Addison-Wesley.



**Sangmin Suh** received the B.S., M.S. and Ph.D. degree in electronics engineering from Hanyang University of Seoul Korea in 1991, 1994, and 2003 respectively. From 1994 to 1999, he has been with Daewoo telecom. Since 2003, he is currently with Samsung electronics. His current research interests include control theory, convex optimization, CNN based vision, and reinforcement learning.