



평면파 파동 함수를 이용한 혼합 경계를 가진 임의 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치 해석

Highly Accurate Eigenvalue Analysis of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities with a Mixed Boundary using Plane Wave Functions

강 상 옥[†]
S. W. Kang[†]

(Received July 15, 2019 ; Revised September 19, 2019 ; Accepted September 19, 2019)

Key Words : Eigenvalues(고유치), Plane Wave(평면파), Arbitrarily Shaped Acoustic Cavity(임의 형상 음향 공동), Spurious Eigenvalue(허위 고유치), Singular Value(특이치), Meshfree Method(무요소법), Basis Function(기저 함수)

ABSTRACT

A meshfree method for a highly accurate eigenvalue analysis of arbitrarily shaped acoustic cavities with a mixed boundary, comprising rigid-wall and pressure-release boundaries, is proposed in this paper. A sound pressure at a point inside an acoustic cavity is assumed by linear superposition of the plane waves propagated from the boundaries of the cavity. First, the sound pressure is assumed as an approximate solution of the eigenvalue analysis of the cavity. Next, two local system matrix equations for the cavity are extracted by applying rigid-wall and pressure-release boundary conditions to the approximate solution and taking a special step to remove two location variables for the Cartesian coordinates. Finally, a global system matrix, the determinant of which provides the eigenvalues of the cavity, is extracted by merging the two local system matrix equations. In addition, a practical and effective approach is proposed to exclude the spurious eigenvalues. In verification examples, comparisons between the eigenvalues by the proposed method and those by the exact solution, FEM, and the NDIF method show that the proposed method has an excellent convergence feature of eigenvalues and produces highly accurate eigenvalues.

1. 서 론

유한요소법^(1~3)과 경계요소법^(4~6)은 임의 형상 평판이나 음향 공동의 고유치와 고유모드를 추출하기 위해 가장 일반적으로 사용되는 수치 해석 기법이다. 이들 수치해석 기법은 평판의 내부 또는 경계를 분할

하기 위해 많은 노드가 필요하고, 노드들 사이에 지배 방정식을 만족하지 않는 보간 함수를 사용하기 때문에, 해의 정밀도가 다소 떨어지는 단점을 가진다.

저자는 이러한 단점을 극복하기 위해, 평면파(plane wave) 기반 무요소법을 2009년 처음으로 개발하여, 단순 지지 경계 조건을 가진 임의 형상 평판에 적용하였다⁽⁷⁾. 상기 무요소법은 유한요소법이나 경계요소

[†] Corresponding Author ; Member, Hansung University
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

[‡] Recommended by Editor Won Ju Jeon
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

법과는 차별적으로 해석 대상 영역을 이산화하는 과정이 필요치 않으며, 기저 함수로 사용되는 평면파 함수가 지배 방정식을 정확히 만족하기 때문에, 해의 수렴성과 정밀도가 매우 우수한 장점을 가진다.

저자는 최근까지 평면파 기반 무요소법을 임의 형상 멤브레인⁽⁸⁾, 강체벽(rigid-wall) 경계를 가진 오픈 임의 형상 음향 공동⁽⁹⁾, 단순지지 경계와 고정단 경계로 구성된 혼합 경계 임의 형상 평판⁽¹⁰⁾에 성공적으로 확장한 연구 결과를 발표하였다.

이 논문에서는 상기 무요소법을 강체벽 음향 공동의 일부 경계가 개방(pressure-release) 경계인 혼합 경계 음향 공동에 확장하는 연구를 수행하였다. 이 논문에서는 두 개의 경계 조건(강체벽 및 개방 경계 조건)으로부터 하나의 글로벌 시스템 행렬을 효율적으로 추출하는 평면파 기반 무요소법 정식화 방안이 제시되었다. 또한, 기존 연구 결과⁽⁹⁾와는 차별적으로, 글로벌 시스템 행렬로부터 얻은 고유치들 속에는 허위 고유치들(spurious eigenvalues)이 포함됨이 밝혀졌으며, 이들 허위 고유치들의 발생 원인 분석 및 이들을 제거하기 위한 특별한 방안이 이 논문에서 제안되었다.

마지막으로, 엄밀해를 가지는 직사각형 음향 공동과 임의 형상 음향 공동에 이 논문에서 제안된 방법을 적용하여, 허위 고유치들이 성공적으로 제거됨과 동시에 제안된 방법에 의해 구해진 고유치가 매우 정확하고 우수한 수렴성을 가짐을 검증하였다. 참고로 이 논문에서는 고유치 추출만이 이루어졌으며, 보다 다양한 형상의 음향 공동을 다루는 향후 연구에서 고유모드 추출 방안에 대한 연구 결과가 발표될 예정이다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

음향 공동의 지배방정식은 식 (1)과 같이 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)의 형태를 가진다⁽¹¹⁾.

$$\nabla^2 p(r) + k^2 p(r) = 0 \tag{1}$$

여기서 r 은 음향 공동 내부의 한 점에 대한 위치 벡터를 의미하고, $p(r)$ 은 음향 공동 내부의 한 점에서의 음압(sound pressure)을 나타내며, k 는 주파수 파라미터이다. 그리고 음향 공동 경계 조건은 개방 경계 조건과 강체벽 경계 조건으로 다음과 같이 각각 주어진다⁽¹¹⁾.

$$p(r_\Gamma) = 0, \quad \frac{\partial p(r_\Gamma)}{\partial n} \tag{2, 3}$$

여기서 r_Γ 는 음향 공동 경계상의 한 점에 대한 위치 벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

2.2 음향 공동 내부 음압 가정

Fig. 1에서 점선으로 표시된 다각형은 해석 대상 음향 공동을 나타낸다. 먼저, 음향 공동의 i 번째 경계(모서리) Γ_i 에서 식 (4)와 같은 평면파(plane wave) 음압 파동이 발생하여 무한 음향장으로 퍼져 나간다고 가정한다.

$$p^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \exp(j \sqrt{k^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} y_i) \tag{4}$$

여기서 (x_i, y_i) 는 경계 Γ_i 에 설정된 로컬 직각 좌표계(local cartesian coordinate system)를 의미하며, N_s 는 경계 Γ_i 에서 발생한 평면파에 사용된 코사인 급수 함수의 개수, $A_m^{(i)}$ 은 경계 Γ_i 에서 발생한 평면파의 진폭 미지 계수, L_i 는 경계 Γ_i 의 길이, j 는 순허수를 나타낸다.

이제, Fig. 1에서 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압 $P(r)$ 은 식 (5)와 같이, 모든 경계 모서리에서 발생한 평면파 음압 파동의 선형 중첩으로 가정한다.

$$p(r) = \sum_{i=1}^{N_e} p^{(i)}(x_i, y_i) \tag{5}$$

여기서 N_e 는 음향 공동 모서리의 개수를 의미한다.

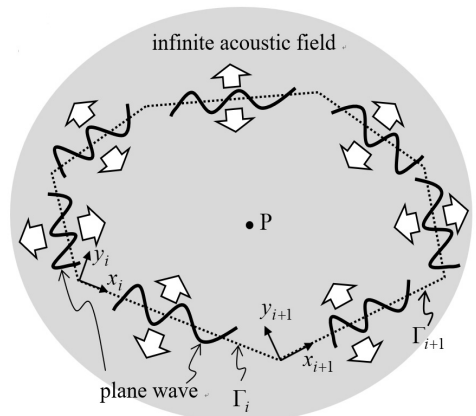


Fig. 1 Arbitrarily shaped acoustic cavity (dotted lines) located on an infinite acoustic filed

2.3 경계 조건 가정

먼저, 해석 대상 음향 공동의 일부 경계가 개방 경계로 이루어져 있다고 가정한다. 즉, 전체 N_c 개의 경계 중에, 경계 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N_c}$ 는 강체벽 경계(N_c 개 경계)이고, 경계 $\Gamma_{N_c+1}, \Gamma_{N_c+2}, \dots, \Gamma_{N_c}$ 는 개방 경계(N_p 개 경계)인 것으로 가정한다. 다음으로, 해석 대상 음향 공동의 강체벽 경계 조건과 개방 경계 조건을 다음과 같이 코사인 급수 함수의 선형 중첩으로 잠정적으로 각각 가정한다.

$$\frac{\partial p}{\partial y_r}(x_r, y_r = 0) = \sum_{n=1}^{N_c} V_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad (6)$$

$r = 1, 2, \dots, N_c$

$$p(x_r, y_r = 0) = \sum_{n=1}^{N_c} U_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad (7)$$

$r = N_c + 1, N_c + 2, \dots, N_c$

여기서 $V_n^{(r)}$ 와 $U_n^{(r)}$ 는 미지 계수를 의미한다.

2.4 강체벽 경계 조건 적용

앞에서 가정한 음압 식 (5)를 강체벽 경계조건 식 (6)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial y_r} \left[\sum_{i=1}^{N_c} p^{(i)}(x_i, y_i) \right]_{y_r=0} = \sum_{n=1}^{N_c} V_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad (8)$$

$r = 1, 2, \dots, N_c$

식 (8)에서 두 좌표계 (x_i, y_i) 와 (x_r, y_r) 는 다음과 같은 상관 관계식을 만족한다.

$$x_i = a_{ir}x_r + b_{ir}y_r + e_{ir} \quad (9)$$

$$y_i = c_{ir}x_r + d_{ir}y_r + f_{ir} \quad (10)$$

여기서 계수 $a_{ir}, b_{ir}, \dots, f_{ir}$ 는 두 좌표계의 원점과 방향을 고려하는 방법에 의해 구해질 수 있다. 식 (8)에 식 (4)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \right. \\ \left. \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \\ = \sum_{n=1}^{N_c} V_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad r = 1, 2, \dots, N_c \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에 포함된 위치 변수 x_i, y_i, x_r 를 없애기 위해, 식 (11)의 양변에 $\cos(q\pi x_r/L_r)$ 를 곱한 후에 경계

Γ_r 을 따라 적분을 수행한다. 그러면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \int_0^{L_r} \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \right. \\ \left. \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \\ \times \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r \\ = \sum_{n=1}^{N_c} V_n^{(r)} \int_0^{L_r} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r \\ r = 1, 2, \dots, N_c; q = 0, 1, \dots, N_s \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)의 우변은 코사인 함수들의 직교성 덕분에 다음과 같이 간단히 된다.

$$\text{우변} = t \times V_n^{(r)} \text{ for } \begin{cases} t = 1.0, q = 0 \\ t = 0.5, q = 1, 2, \dots, N_s \end{cases} \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \int_0^{L_r} \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \right. \\ \left. \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \\ \times \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r = t V_q^{(r)} \\ r = 1, 2, \dots, N_c; q = 0, 1, \dots, N_s \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)는 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} G_{(q,m)}^{(r,i)} = V_q^{(r)} \quad (15)$$

$r = 1, 2, \dots, N_c; q = 0, 1, \dots, N_s$

여기서 $G_{(q,m)}^{(r,i)}$ 은 다음과 같다.

$$G_{(q,m)}^{(r,i)} = \frac{1}{t} \int_0^{L_r} \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \right. \\ \left. \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \quad (16)$$

2.5 개방 경계 조건 적용

앞에서 가정한 음압 식 (5)를 개방 경계조건 식 (7)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\left[\sum_{i=1}^{N_c} p^{(i)}(x_i, y_i) \right]_{y_r=0} = \sum_{n=1}^{N_c} U_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad (17)$$

$r = N_c + 1, N_c + 2, \dots, N_c$

식 (17)에 식 (4)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \left[\cos \frac{m\pi x_1}{L_i} \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \quad (18)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_s} U_n^{(r)} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r}$$

$r = N_c + 1, N_c + 2, \dots, N_c$

식 (18)의 양변에 $\cos(q\pi x_r/L_r)$ 를 곱한 후에 정계 Γ_r 을 따라 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} \int_0^{L_r} \left[\cos \frac{m\pi x_1}{L_i} \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \times \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r$$

$$= \sum_{n=1}^{N_s} U_n^{(r)} \int_0^{L_r} \cos \frac{n\pi x_r}{L_r} \times \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r$$

$r = N_c + 1, N_c + 2, \dots, N_c; q = 0, 1, \dots, N_s$

(19)

식 (19)는 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sum_{m=0}^{N_s} A_m^{(i)} H_{(q,m)}^{(r,i)} = U_q^{(r)}$$

$r = N_c + 1, N_c + 2, \dots, N_c; q = 0, 1, \dots, N_s$

(20)

여기서 $H_{(q,m)}^{(r,i)}$ 는 다음과 같다.

$$H_{(q,m)}^{(r,i)} = \frac{1}{t} \int_0^{L_r} \left[\cos \frac{m\pi x_i}{L_i} \times \exp \left(j \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i} \right)^2} y_i \right) \right]_{y_r=0} \times \cos \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r \quad (21)$$

참고로, $r = i$ 와 $q = m$ 인 경우에 식 (16), (21)은 발산하여 바로 계산될 수 없으며, 극한 개념을 적용하여 계산하는 특별한 추가 조치가 필요하다.

2.6 시스템 행렬 추출

앞에서 구한 식 (15)와 식 (20)은 다음과 같이 각각 행렬식의 형태로 표현이 가능하다.

$$SM_G A = V \quad (22)$$

$$SM_H A = V \quad (23)$$

여기서 로컬 시스템 행렬 SM_G 와 SM_H 의 $[(r-1)N_s$

$+(q+1)]$ 행 열 성분은 각각 식 (16)과 식 (21)에 의해 각각 주어진다. 그리고 벡터 A 의 $[(i-1)N_s + (m+1)]$ 열 성분은 $A_m^{(i)}$ 이며, 벡터 V 와 U 의 $[(r-1)N_s + (q+1)]$ 행 성분은 각각 $U_q^{(r)}$ 와 $V_q^{(r)}$ 이다. 마지막으로 최종 시스템 행렬식은 식 (22)와 식 (23)을 하나로 합치는 방법에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} A = \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} \quad (24)$$

여기서 $[SM_G \ SM_H]^T$ 는 크기가 $N_s N_c$ 인 정사각 행렬이며, 이 논문에서는 글로벌 시스템 행렬로 정의한다. 식 (24)에 식 (6), (7)의 강체벽 경계 조건과 개방 경계 조건을 고려하면 각각 $V = 0$ 과 $U = 0$ 에 해당되므로, 식 (24)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

식 (25)에서 $A = 0$ 이 안 되기 위해서는 다음과 같이 글로벌 시스템 행렬의 판별식이 0이 되어야 한다.

$$\det \begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

식 (26)에서 로컬 시스템 행렬 SM_G 와 SM_H 는 식 (1)에서 설명한 주파수 파라미터 k 의 함수이며, 식 (26)을 만족하는 주파수 파라미터값으로부터 해석 대상 음향 공동의 고유치를 구할 수 있다.

3. 허위 고유치 문제 분석 및 해결

3.1 허위 고유치 분석

Fig. 2와 같은 엄밀해(exact solution)가 존재하는 혼합 경계 조건을 가진 직사각형 음향 공동(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)에 이 논문에서 제안된 방법을 적용하였다. Fig. 2에서 실선 경계는 강체벽 경계를 의미하며, 점선 경계는 개방 경계를 의미한다.

식 (26)을 만족하는 주파수 파라미터 값은 글로벌 시스템 행렬의 특이치(singular value)에 해당된다. 그래서, Fig. 3과 같이 $N_s = 4$ 인 경우에 대해 $\det[SM_G \ SM_H]^T$ 곡선을 주파수 파라미터에 대해 그렸으며, 이 곡선에서 시스템 행렬 $[SM_G \ SM_H]^T$ 의 특이치들을 $S_1 \sim S_{12}$ 로 표시하였다. Table 1의 첫 번째 열에 요약된 이 특이치 값들을 혼합 경계에 대한 엄밀해(Table 1의 두 번째 열)⁽¹²⁾와 비교해보면, 6개 특

이치 $S_1, S_4, S_5, S_8, S_{10}, S_{12}$ 만이 엄밀해와 정확히 일치함을 알 수 있다. 나머지 특이치들은 허위 고유치 (spurious eigenvalue)에 해당되며, 이들 허위 고유치들 중에 $S_2, S_3, S_6, S_7, S_9, S_{11}$ 는 해석 대상 음향 공동과 같은 형상을 가진 강체벽 경계 음향 공동의 고유치(Table 1의 세 번째 열)와 일치하고, S_6 와 S_9 는 개방 경계 음향 공동의 고유치(Table 1의 마지막 열)와 일치함을 알 수 있다. 이러한 사실로부터, 식 (26)에 의해 구해지는 고유치들 속에는 강체벽 경계 음향 공동의 고유치들과 개방 경계 음향 공동의 고유치들에 해당하는 허위 고유치들이 포함된다는 것을 알 수 있다. 다음 절에서는 이들 허위 고유치들을 제거하기 위한 방안이 제시된다.

3.2 허위 고유치 제거 방안

3.1절에서 허위 고유치가 발생하는 원인은 글로벌

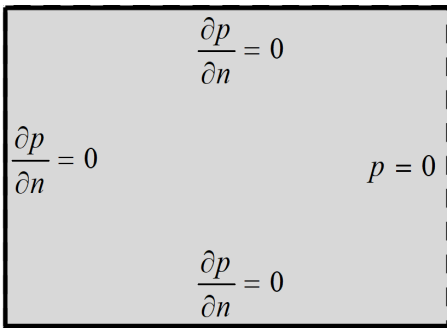


Fig. 2 Rectangular cavity with a mixed boundary (rigid-wall: $\partial p/\partial n = 0$ and pressure-release: $p = 0$)

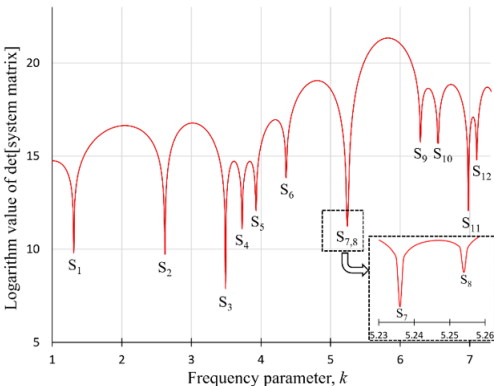


Fig. 3 Determinant curves for $\det [SM_G SM_H]^T$ of the rectangular cavity with the mixed boundary using $N_s = 4$

시스템 행렬 $[SM_G SM_H]^T$ 이 식 (27)과 같이 여러 개의 시스템 행렬들의 곱으로 나타내어 지기 때문인 것으로 추정 된다.

$$\begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} A = [SM_{\partial p/\partial n = 0}] [SM_{p=0}] [SM_{Mixed}] \quad (27)$$

여기서 $[SM_{\partial p/\partial n = 0}]$ 은 강체벽 경계 음향 공동의 시스템 행렬, $[SM_{p=0}]$ 은 개방 경계 음향 공동의 시스템 행렬, $[SM_{Mixed}]$ 은 혼합 경계 음향 공동의 시스템 행렬을 의미한다. $[SM_{\partial p/\partial n = 0}]$ 은 식 (5)를 강체벽 경계 조건 식 (6)에 대입하는 방법(단, 식 (6)에서 $r=1, 2, \dots, N_e$ 로 변경)에 의해 구해질 수 있다. 마찬가지로, $[SM_{p=0}]$ 은 식 (5)를 개방 경계 조건 식 (7)에 대입하는 방법(단, 식 (7)에서 $r=1, 2, \dots, N_e$ 로 변경)에 의해 구해질 수 있다. 참고로, $[SM_{Mixed}]$ 은 직접적으로 구해질 수 없다.

식 (27)을 식 (26)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\det \begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} = \det [SM_{\partial p/\partial n = 0}] \det [SM_{p=0}] \det [SM_{Mixed}] \quad (28)$$

Table 1 Eigenvalues of the rectangular cavity obtained by the proposed method and the exact solution

Proposed method ($N_s=4$)		Exact solution		
Mixed boundary		Mixed boundary	Rigid-wall boundary	Pressure release boundary
S_1	1.309	1.309		
S_2	2.618		2.618	
S_3	3.491		3.491	
S_4	3.728	3.728		
S_5	3.927	3.927		
S_6	4.363		4.363	4.363
S_7	5.236		5.236	
S_8	5.254	5.254		
S_9	6.293		6.293	6.293
S_{10}	6.545	6.545		
S_{11}	6.981		6.981	
S_{12}	7.103	7.103		

식 (28)로부터 혼합 경계 음향 공동의 시스템 행렬의 판별식을 식 (29)와 같이 구할 수 있다.

$$\det [SM_{Mixed}] = \det \begin{bmatrix} SM_G \\ SM_H \end{bmatrix} / (\det [SM_{p=0}] \det [SM_{\partial p/\partial n = 0}]) = 0 \quad (29)$$

Fig. 4는 관심 주파수 대역에서 $\det [SM_{Mixed}]$ 곡선을 주파수 파라미터에 대해 그린 결과를 보여준다. Fig. 3의 곡선과는 차별적으로, 혼합 경계를 가진 음향 공동의 고유치에 해당되는 6개의 특이치들($S_1, S_4, S_5, S_8, S_{10}, S_{12}$)만이 곡선에서 나타나고, 허위 고유치 값들은 특이치들에서 성공적으로 배제됨을 확인할 수 있다.

4. 예제 검증

4.1 혼합 경계 직사각형 음향 공동

Fig. 2의 혼합 경계 조건을 가진 직사각형 음향 공

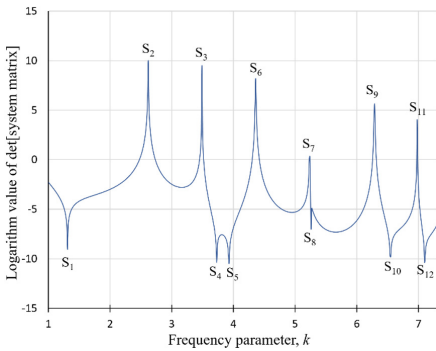


Fig. 4 Determinant curves for $\det [SM_{Mixed}]$ of the rectangular cavity with the mixed boundary using $N_s = 4$

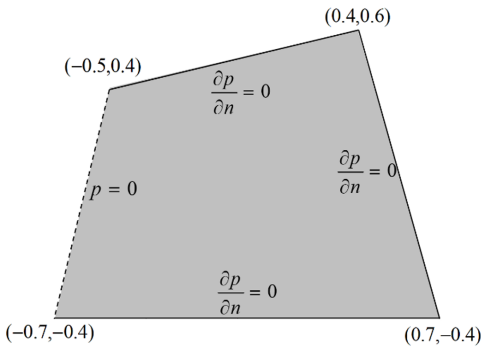


Fig. 5 Arbitrarily shaped cavity with a mixed boundary condition (rigid-wall: $\partial p/\partial n = 0$ and pressure-release: $p = 0$)

동에 이 논문에서 제안된 방법(식 (29))을 적용하여, 급수 함수의 개수 N_s 값을 변화시킴에 따른 고유치의 수렴성과 정확성을 확인하고자 한다.

Table 2는 이 논문에서 제안된 방법(proposed method), 엄밀해(exact solution)⁽¹²⁾, FEM(ANSYS)에 의해 구해진 고유치 결과들을 보여준다. 표에서 알 수 있듯이, 이 논문에서 제안된 방법은 단지 $N_s = 3$ 일 때 엄밀해에 완전히 수렴된 정확한 결과를 제공함을 확인할 수 있다. 1271개의 많은 노드를 사용한 FEM(ANSYS) 고유치 결과는 엄밀해와 0.03% ~ 0.17% 정도의 오차를 가지는 것으로 확인되며, 이 사실로부터 제안된 방법이 FEM에 비해 적은 수치 계산량으로도 더 정확한 결과를 제공함을 확인할 수 있다. 한편, 인 경우에 여섯 번째 고유치는 아직 구해지지 않음을 확인할 수 있으며, 이는 여섯 번째 고유 모드 형상이 2개의 급수 함수로는 나타내기가 충분치 않기 때문인 것으로 판단된다.

Table 2에의 마지막 열에는 NDIF법⁽¹³⁾에 의해 구해진 고유치 결과를 보여준다. 저자가 처음 개발한 고정밀도 고유치 추출 기법⁽¹⁴⁾인 NDIF법은 노드 수가 증가할 경우, 저차의 고유치가 수렴하지 않고 발산하는 단점이 존재한다. 이러한 이유로 해서 첫 번째 고유치가 구해지지 않음을 Table 1에서 확인할 수 있다. 반면에 이 논문에서 제안된 방법은 이러한 단점이 나타나지 않음을 확인할 수 있다.

Table 2 Eigenvalues of the rectangular cavity by the proposed method, the exact solution, FEM and the NDIF method (parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by the exact solution)

	Proposed method			Exact solution	FEM (1271 nodes)	NDIF method (24 nodes)
	$N_s=2$	$N_s=3$	$N_s=4$			
1	1.309 (0.00)	1.309 (0.00)	1.309 (0.00)	1.309	1.308 (0.08)	None
2	3.728 (0.00)	3.728 (0.00)	3.728 (0.00)	3.728	3.729 (0.03)	3.728 (0.00)
3	3.927 (0.00)	3.927 (0.00)	3.927 (0.00)	3.927	3.926 (0.03)	3.927 (0.00)
4	5.254 (0.00)	5.254 (0.00)	5.254 (0.00)	5.254	5.253 (0.04)	5.254 (0.00)
5	6.545 (0.00)	6.545 (0.00)	6.545 (0.00)	6.545	6.551 (0.06)	6.545 (0.00)
6	None	7.103 (0.00)	7.103 (0.00)	7.103	7.115 (0.17)	7.103 (0.00)

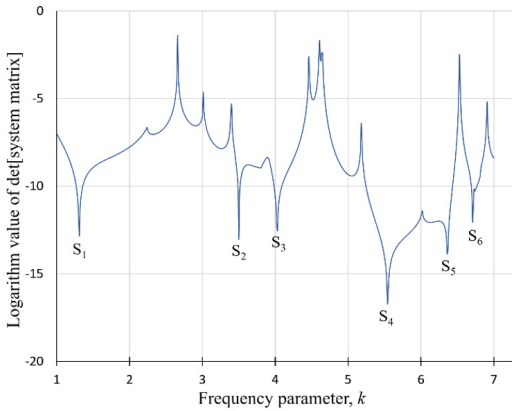


Fig. 6 Determinant curves for $\det[SM_{Mixed}]$ of the rectangular cavity with the mixed boundary using $N_s = 6$

Table 3 Eigenvalues of the arbitrarily shaped cavity by the proposed method and FEM (parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by FEM using 2542 nodes)

	Proposed method				FEM (ANSYS)
	$N_s=5$	$N_s=6$	$N_s=7$	$N_s=8$	2542 nodes
S_1	1.307 (0.15)	1.307 (0.15)	1.308 (0.08)	1.308 (0.08)	1.309
S_2	3.500 (0.06)	3.501 (0.03)	3.501 (0.03)	3.501 (0.03)	3.502
S_3	4.027 (0.10)	4.026 (0.07)	4.025 (0.05)	4.025 (0.05)	4.023
S_4	5.541 (0.09)	5.543 (0.05)	5.544 (0.04)	5.545 (0.02)	5.546
S_5	6.363 (0.08)	6.363 (0.08)	6.364 (0.06)	6.365 (0.05)	6.368
S_6	6.712 (0.04)	6.712 (0.04)	6.713 (0.03)	6.713 (0.03)	6.715

4.2 임의의 형상 오목 음향 공동

이 예제 검증에서는 Fig. 5와 같은 혼합 경계를 가진 임의의 형상 음향 공동이 고려되었다.

Fig. 6은 $N_s = 6$ 인 경우에 대한 식 (29)의 $\det[SM_{Mixed}]$ 곡선을 보여준다. 이 곡선상에 표시된 6개의 특이치 $S_1 \sim S_2$ 은 Table 3에 요약되었으며, 이 값들은 FEM에 의해 구한 고유치들과 단지 0.03% ~ 0.15% 오차 범위 내에서 거의 일치함을 보여준다. 아

울러 허위고유치들이 성공적으로 제거되었음도 확인 가능하다. $N_s = 5, 7, 8$ 에 대한 고유치 추출 결과도 Table 3에 요약되었다. N_s 값이 증가됨에 따라 고유치가 어떤 값에 수렴이 되는 우수한 수렴성을 가짐을 확인할 수 있으며, 단지 $N_s = 8$ 개를 사용한 경우의 고유치들은 2542개의 많은 노드를 사용한 FEM 결과와 거의 정확히 일치함(0.03% ~ 0.08% 오차 범위)을 알 수 있다. 참고로 해석 대상 음향 공동은 엄밀해가 존재하지 않기 때문에, 많은 노드를 사용한 FEM 결과와 비교하여 제안된 방법의 정밀도와 수렴성을 검증하였다.

5. 결론

이 논문에서는 혼합 경계를 가진 임의의 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치 해석을 위해, 평면파 기반 무요소법이 제안되었다. 두 가지 예제 검증을 통하여, 이 논문에서 제안된 방법이 FEM이나 NDIF법에 비해 우수한 수렴성과 정밀도를 확보하고 있음이 검증되었다. 향후에는 음향 공동의 고유 모드 추출 방법에 대한 연구와 다양한 형상의 3차원 음향 공동에 대한 확장 연구가 수행될 예정이다.

후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원 과제임.

References

- (1) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) Barik, M. and Mukhopadhyay, M., 1998, Finite Element Free Flexural Vibration Analysis of Arbitrary Shape, Journal of Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 29, No. 2, pp. 137~152.
- (3) Liew, K. M. and Sum, Y. K., 2003, Vibration of Plates Having Orthogonal Straight Edges with Clamped Boundaries, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, No. 2, pp. 184~192.
- (4) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, New York.
- (5) Beskos, D., 1996, Boundary Element Advances in

Solid Mechanics. Springer-Verlag, New York.

(6) Gao, X. W. and Brebbia, C. A., 2013, Boundary Elements and Other Mech Reduction Methods, WIT Press, Southampton.

(7) Kang, S. W. and Atluri, S. N., 2009, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Simply Supported Edges Using a Sub-domain Method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 327, No. 3, pp. 271~284.

(8) Kang, S. W. and Yon, J. I., 2009, Eigenvalue Analysis of Arbitrarily Shaped, Concave Membranes with a Deep Groove Using a Sub-domain Methods, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 19, No. 10, pp. 1069~1074.

(9) Kang, S. W., 2018, Eigenvalue Analysis of Arbitrarily Shaped, Acoustic Cavities using Two-domain Method, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 28, No. 4, pp. 410~416.

(10) Kang, S. W., 2019, Application of Highly Accurate Eigenvalue Analysis of Arbitrarily Shaped Plates Using Series Functions, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 29, No. 2, pp. 255~261.

(11) Hall, D. E., 1987, Basic Acoustics, John Wiley & Sons, Inc., Singapore.

(12) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Litton Educational Publishing, New York.

(13) Kang, S. W., 2018, Extraction of Highly Accurate Eigenvalues of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities with a Mixed Boundary, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 28, No. 5, pp. 542~547.

(14) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.



Sang-Wook Kang received a B.S., M.S. and Ph.D. degree in Dept. of Mechanical Design Engineering from Seoul National University in 1992, 1994 and 1999, respectively. He is currently working in Hansung University as a professor of the mechanical system engineering. His research interests include the development of NDIF method for free vibration analysis of membrane, acoustic cavities, and plates with general shapes.