

# 유연축을 갖는 기어트레인으로 구동되는 회전 서보계 제어의 안정성 해석

## Stability Analysis of Rotating Servo Control System Driven by Flexible Gear Train

강 민 식<sup>†</sup>  
Min Sig Kang<sup>†</sup>

(Received April 5, 2021 ; Revised May 4, 2021 ; Accepted May 7, 2021)

**Key Words :** Control Stability Analysis(제어 안정성 해석), Rotating Servo-system(회전서보계), Flexible Shaft(유연축), Gear Train(기어트레인), Modal Analysis(모드해석), Two-mass-system(이질량계), Stabilizability(가안정성)

### ABSTRACT

This study focuses on the stability of feedback control for rotating servo systems driven by a flexible gear train. In servo drive systems where the load is connected to the driving motor through a flexible shaft that has insufficient stiffness, unwanted mechanical vibration can occur. This mechanical vibration can reduce the control performance. To suppress this mechanical vibration, state feedback controls or cascade PI(proportional-integral) controls have been proposed. However, the state feedback control is cumbersome to be applied to the design; moreover, a PI-based cascade control cannot ensure stability. In this study, as an internal damping control, a simple feedback control based on the relative position or relative speed between the driving motor and load is proposed, and their stability conditions are derived. The feasibility of the proposed method is verified through simulation examples.

### 기 호 설 명

- $J_m, J_L$  : 모터와 부하의 관성질량모멘트
- $K_a, K_b$  : 내부 PI-제어이득
- $K_p, K_i$  : 외부 PI-제어이득
- $K_{eq}$  : 등가스프링 상수
- $N$  : 기어트레인의 기어비
- $T_m, T_d$  : 제어토크와 외란토크
- $T_{m,fb}$  : 되먹임 제어입력

- $T_{m,vmc}$  : 차량운동 보상제어입력
- $\theta_L$  : 부하의 회전각
- $\omega_m, \omega_L, \omega_h$  : 모터, 부하, 차량의 절대각속도

### 1. 서 론

회전각도 또는 회전속도를 제어하는 회전서보제어 계에는 구동원의 토크를 부하에 직접 전달하는 직접 구동방식과 구동원과 부하 중간에 구동에너지 전달장치를 통해 전달하는 간접구동방식으로 나눌 수 있다.

<sup>†</sup> Corresponding Authors; Member, Department of Mechanical Engineering, Gachon University, Professor  
E-mail : mskang@gachon.ac.kr

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Sang Wook Kang  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

정밀한 제어 성능을 달성하기 위해서는 직접구동방식이 제일 적합하나, 부하를 직접 구동해야 되므로 구동원의 출력용량이 상대적으로 커야 되는 단점이 있다. 반면 간접구동방식에서는 일반적으로 구동원 출력을 증폭시켜 부하에 전달하므로 상대적으로 작은 용량의 구동원을 사용할 수 있는 장점이 있다. 간접구동방식에서 사용하는 대표적인 동력전달장치는 기어 또는 다수의 기어가 결합된 기어열(gear train)을 들 수 있다. 하지만 기어 또는 기어열의 대표적인 단점으로는 백래시, 마찰과 아울러 기어축의 유한한 강성에 의한 제어계의 불안정성을 들 수 있다. 기어축의 강성은 제어 측면에서 클수록 유리하나, 강성을 높이기 위해서는 기어 또는 기어열의 부피와 질량이 커지는 단점이 있다.

기어축의 강성에 의한 제어 시스템의 저감쇠 진동은 제어시스템의 제어성능을 저하시킬 수 있으며, 불안정성을 유발하기도 한다. 이 문제를 완화하기 위해 진동발생을 억제하거나, 제어를 통해 댐핑을 부여하는 방법이 많이 이용되고 있다<sup>(1-5)</sup>.

진동 발생을 억제시키는 방법으로는 기준입력을 셰이핑(input shaping)하거나 필터를 이용하여 공진주파수 진동모드를 가진하지 않도록 하는 방법이 있다. 필터링 방법은 측정 센서 신호에 공진주파수에 해당하는 신호를 제거하기 위한 저역통과필터(low pass filter), 또는 노치필터(notch filter)를 사용하는 방법을 들 수 있다. 하지만 저역통과필터는 공진주파수가 폐회로시스템 대역폭의 3배 ~ 10배 이상이 되어야 유용하게 사용할 수 있으며, 노치필터는 공진주파수를 정확하게 알아야 좋은 성능을 기대할 수 있다<sup>(6)</sup>. 하지만 구동부 내에 저감쇠의 진동 모드가 내재되어 있으므로 필터를 사용하는 수동적인 방법보다는 제어에 의해 이 진동 모드에 감쇠를 부여하는 방법이 시스템 안정성과 응답성능에 더 유리하다.

제어에 의한 진동 감쇠 방법으로는 기어열을 구성하는 각 기어의 회전각이나 회전속도를 측정하여 되먹임제어함으로써 진동모드에 감쇠를 부여하는 방법을 들 수 있다. 하지만 이 경우 각 기어의 운동을 측정해야 하는 부담이 있다. 따라서 구동축 강성을 고려한 대부분의 서보제어 연구에서는 전체 시스템의 모델을 모터와 부하의 관성과 둘 사이에 강성이 존재하는 이질량계(two-mass-system)로 단순화하고,

이 모델을 기준으로 제어기를 설계하는 방법이 일반적이다<sup>(7-12)</sup>.

제어기로는 내부의 PI-전류제어루프와 외부의 위치나 속도의 PI-제어를 적용하는 다단계어(cascade control)가 많이 이용되고 있으며, 진동의 감쇠를 위해 추가적으로 모터와 부하의 속도, 가속도, 전달 토크 등을 되먹임제어하는 방법이 이용되고 있다<sup>(1,7)</sup>.

하지만 다자유도 진동모드를 갖는 다단 기어열을 이용하는 시스템의 경우 2-자유도 진동계로 단순화하여 제어기를 설계할 경우 진동모드의 특성에 의해 PI-제어 기반 다단계어와 추가적 감쇠제어를 적용할 때 진동모드의 특성에 따라 시스템의 불안정성이 나타날 수 있다<sup>(8,12)</sup>.

이 연구에서는 유연강성을 갖는 기어열을 동력전달장치로 사용하는 경우 구동부와 부하의 상대적 진동을 측정하여 추가적 되먹임제어를 할 경우 진동모드에 따른 안정성을 해석하며, 안정할 조건을 제시한다.

## 2. 다자유도 구동 모델

Fig. 1과 같이 모터의 구동 토크가 기어트레인을 통해 부하에 전달되는 구동시스템을 고려한다. 기어트레인은 다단의 기어열로 구성되며, 기어축은 비틀림 강성을 갖는다.

Fig. 1에서  $J_{i,1}$  ( $= J_m$ )은 구동모터의 회전관성,  $J_L$ 은 부하의 회전관성이며,  $J_{i,1}$ ,  $J_{i,2}$ 는 각각  $i$ -번째 기어열의 입력기어와 출력기어의 회전관성이다. 입력기어는

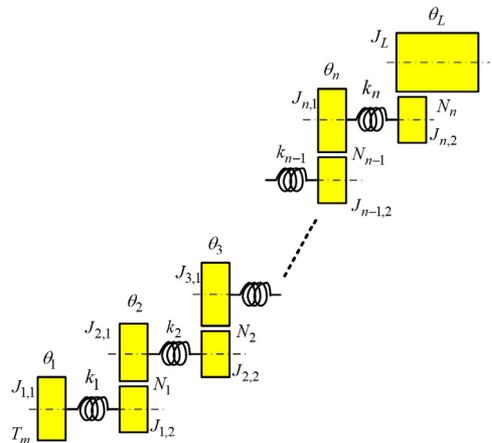


Fig. 1 Schematic of gear train driving system

구동모터에 가까운 기어를, 출력기어는 부하에 가까운  $N_i, i=1, 2, \dots, n$ 은 각 단의 기어비이며, 맞물린 기어 간의 기어비이다.  $T_m$ 은 모터의 구동토크이다.  $\theta_1(=\theta_m)$ 은 모터의 회전각,  $\theta_L$ 은 부하의 회전각이며,  $\theta_i, i=1, 2, \dots, n$ 은  $i$ -번째 기어열의 입력기어 회전각이다.

2.1 운동방정식

이 구동계의 운동에너지와 위치에너지를 합  $E$ 는 식(1)과 같다.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} (J_L + N_n^2 J_{n,2}) \dot{\theta}_L^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\theta_i - N_i \theta_{i+1})^2 + \frac{1}{2} k_n (\theta_n - N_n \theta_L)^2 \quad (1)$$

여기서  $\begin{cases} J_1 = J_m \\ J_i = J_{i,1} + N_{i-1}^2 J_{i-1,2}, i=2, 3, \dots, n \end{cases}$  이다.

식(1)에서 계의 운동방정식은 식(2)와 같다.

$$[J]\ddot{x} + [K]x = \{B\}T_m \quad (2)$$

여기서  $[J]$ 는 관성행렬,  $[K]$ 는 강성행렬이며  $[B]$ 는 입력벡터,  $x$ 는 변수벡터로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [J] &= \text{diag} [J_m \quad J_2 \quad \dots \quad J_n \quad J_L + N_n^2 J_{n,2}] \\ [K]^T &= [k_1^T \quad \dots \quad k_j^T \quad \dots \quad k_{n+1}^T] \\ \begin{cases} k_1 &= [k_1 \quad -N_1 k_1 \quad 0_{n-1}] \\ k_i &= [0_{i-2} \quad -N_{i-1} k_{i-1} \quad k_i + N_{i-1}^2 k_{i-1} \quad -N_i k_i \quad 0_{n-i}] \\ k_{n+1} &= [0_{n-1} \quad -N_n k_n \quad N_n^2 k_n] \end{cases} \\ [B]^T &= [1 \quad 0_n] \\ x^T &= [\theta_m \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n \quad \theta_L] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\text{diag}[\dots]$ 는 대각행렬(diagonal matrix),  $0_i$ 는 요소가 모두 0인  $i$ -차 행벡터(row vector)이다. 식(3)의 강성행렬을 구성하는 행벡터가 식(4)의 관계를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} N_n(N_{n-1}(\dots(N_2(N_1 k_1 + k_2) + k_3) \dots + k_n) \\ + k_{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

그 결과 이 시스템이 반한정계(semi-definite system)임을 알 수 있으며, 따라서 고유치가 0인 모드, 즉 모터-기어트레인의 각 기어-부하가 정해진 기어비의 관계 만족하며 상대적 진동이 없이 회전하는 모드가 존재함을 확인할 수 있다. 이 모드의 고유벡터(eigen-vector)는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \theta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/N_1 \\ 1/N_1 N_2 \\ \vdots \\ 1/N_1 N_2 \dots N_{n-1} \\ 1/N \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $N = N_1 N_2 \dots N_{n-1} N_n$ 이다.

식(2)의 진동계에서 모드해석을 통해 고유치(eigen-value)와 해당 고유벡터 및 고유벡터로 구성되는 고유행렬(modal matrix)을 구할 수 있다. 단, 모든 고유치는 서로 다른 것으로 가정한다. 이 가정은 실제 진동계에서 일반적인 가정이다.

고유치를  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n+1$ 라 하고, 고유치의 순서는  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1}$ 으로 가정한다. 단,  $\lambda_1 = 0$ .

각 고유치에 해당하는 질량 정규화(normalized)된 고유벡터를  $u_i, i=1, 2, \dots, n+1$ 라 하고, 이 고유벡터로 구성된 고유행렬을 식(6)으로 정의된  $[U]$ 라 하자.

$$[U] = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \quad u_{n+1}] \quad (6)$$

여기서  $\{u_i\}^T = [u_{i,1} \quad u_{i,2} \quad \dots \quad u_{i,n} \quad u_{i,n+1}]$ 이다.

식(6)의 고유행렬을 이용하여 식(7)과 같이 좌표 변환을 할 수 있다.

$$x = [U]q \quad (7)$$

여기서  $q^T = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{n+1}]$ 는 주좌표계이다.

식(2)와 (7)의 관계를 적용하여 다시 쓰면 식(8)을 얻을 수 있다.

$$[U]^T [J] [U] \ddot{q} + [U]^T [K] [U] q = [U]^T \{B\} T_m \quad (8)$$

고유행렬의 직교성 및 정규화 특성에 따라 식(8)은

연성이 없는 각 모드의 독립된  $n+1$ 개의 운동방정식을 얻게 되고, 이를 라플라스 변환하면 다음으로 정리된다.

$$Q_i(s) = R_i T_m(s), R_i = \frac{u_{i,1}}{s^2 + \lambda_i}, i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (9)$$

여기서  $Q_i(s)$ 와  $T_m(s)$ 는 각각  $q_i(t)$ 와  $T_m(t)$ 의 라플라스 변환이다.

### 2.2 구동계 진동제어

Fig. 1의 구동계는  $n+1$ 개의 진동모드가 존재하므로 이를 무시하고 부하를 제어할 경우 심한 진동이 발생하거나 불안정해질 수 있다. 따라서 부하의 운동 제어를 위해 기어트레인의 강성에 의한 진동 안정화가 필요하다.

이 연구에서는 구동계의 진동 안정화를 위해 식 (10)과 같이 모터와 부하의 상대적인 운동만을 이용하여 모터의 구동 토크를 제어하는 경우를 고려한다.

$$T_m(s) = -\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \{ \theta_m(s) - N\theta_L(s) \} \quad (10)$$

여기서  $N_c(s)/D_c(s)$ 는 제어기 전달함수이며,  $N_c(s)$ 와  $D_c(s)$ 는 각각 일계수다항식(mononic polynomial)이고,  $\mu$ 는 제어기 이득,  $s$ 는 라플라스 연산자이다.

식 (10)의 제어기는 모터와 부하의 회전각 또는 각속도를 측정하여 되먹임하는 구조이다. 기어트레인 내부 기어의 회전각이나 각속도를 측정하여 제어에 적용하는 것은 실제적으로 제한이 많은 데 비해, 이 제어기는 모터와 부하의 운동만을 측정하면 되므로 구현이 용이하다.

제어기에서 부하의 회전각에 총기어비  $N$ 을 곱한 이유는 기하학적 모드(모터-기어열-부하가 정해진 기어비로 상대적 진동 없이 회전하는 고유진동수가 0인 운동 모드, 첫 번째 모드)는 제어에 영향을 받지 않도록 하기 위함이다.

$$\begin{cases} \theta_m(s) = -\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \sum_{i=1}^{n+1} u_{i,1} R_i \{ \theta_m(s) - N\theta_L(s) \} \\ \theta_L(s) = -\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \sum_{i=1}^{n+1} u_{i,n+1} R_i \{ \theta_m(s) - N\theta_L(s) \} \end{cases} \quad (11)$$

식 (9)와 (10)을 적용하여 식 (11)의 모터와 부하의 폐회로 응답을 구할 수 있으며, 이 때 폐회로의 특성 방정식은 식 (12)와 같다.

$$P(s) = 1 + \mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \{ W_{i,1} - N W_{i,n+1} \} \quad (12)$$

여기서  $W_{i,1}$ 과  $W_{i,n+1}$ 은 다음과 같다.

$$W_{i,1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_{i,1} R_i, W_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_{i,n+1} R_i \quad (13)$$

**정리 1.** Fig. 1 또는 식 (2)의 운동방정식을 갖는 시스템에서 식 (10)의 제어를 적용할 경우 기하학적 모드를 제외한 폐회로 응답은 다음 식 (14)를 만족하면 제어 이득  $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 의 범위에서 점근안정성(asymptotic stability)을 만족한다.

$$\text{Re} \left[ j \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \Big|_{s=j\omega_k} \{ u_{k,1} (u_{k,1} - N u_{k,n+1}) \} \right] < 0, \quad k = 2, \dots, n+1 \quad (14)$$

여기서  $\text{Re}[*]$ 는 복소수  $*$ 의 실수부를 의미하며,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\mu_{cr}$ 은  $0 < \mu$ 가 증가함에 따른 폐회로의 극점적 중 허수축과 처음 교차하는 근궤적이 발생할 때의  $\mu$ 값을 의미한다.

**증명 1.** 식 (12)의 폐회로 특성방정식에서 제어기 이득  $\mu$ 가 미소값  $\Delta\mu$ 를 가질 경우  $1 < k$ -번째 폐회로 극점( $\pm j\omega_k$ )이 미소 이동을 하게 되고, 이 미소 이동한 극점을  $s_{\pm k} = \pm j\omega_k + \Delta s_{\pm k}$ ,  $\omega_k > 0$ 라 하면 특성 방정식 식 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$1 + \Delta\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \Big|_{s=\pm j\omega_k} \frac{u_{k,1} (u_{k,1} - N u_{k,n+1})}{\pm j 2\omega_k \Delta s_{\pm k}} = 0, \quad k = 2, \dots, n+1 \quad (15)$$

여기서  $j = \sqrt{-1}$ 이다.

식 (15)에서 제어기 이득의 미소변화와  $k$ -번째 폐회로 극점의 변화의 관계는 식 (16)과 같다.

$$\frac{\Delta s_{\pm k}}{\Delta \mu} = \pm j \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \bigg|_{s=\pm j\omega_k} \left\{ \frac{u_{k,1}(u_{k,1} - Nu_{k,n+1})}{2\omega_k} \right\},$$

$$k = 2, \dots, n+1 \tag{16.1}$$

식 (16.1)에서  $\Delta s_{+k}$ 와  $\Delta s_{-k}$ 는 실수축에 대칭이므로, 식 (16.1)은 (16.2)로 단순화할 수 있다.

$$\frac{\Delta s_k}{\Delta \mu} = j \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \bigg|_{s=j\omega_k} \left\{ \frac{u_{k,1}(u_{k,1} - Nu_{k,n+1})}{2\omega_k} \right\},$$

$$k = 2, \dots, n+1 \tag{16.2}$$

따라서 폐회로 극점이 라플라스 평면의 좌평면으로 이동하여 안정화될 조건은 식 (14)와 같다.

식 (14)는 연속계에서의 안정성 조건<sup>(13)</sup>에 대응되는 이산계에서의 조건에 해당한다.

**주 1.**

$\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1} = 0$ 을 만족하는  $i$ -번째 모드는 제어에 의한 영향을 받지 않으므로 가제어성(controllability)을 만족하지 못한다. 식 (5)에서  $\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1} = 0$ 이므로 첫 번째 모드는 가제어성을 만족하지 못하며, 폐회로 극점은 제어기 전달함수에 관계없이 원점에서 변화가 없다.

**주 2.**

식 (14)를 만족하지 못하는 경우 폐회로의 극점은 이득이 증가하면서 불안정 영역으로 이동하며, 더 증가할 경우 전방경로전달함수의 극점과 영점의 위치에 따라 일부의 극점이 안정 영역으로 이동할 수는 있다.

식 (10)은 모든 형태의 제어를 포함하지만, 이 제어는 기어열 강성에 의한 진동의 감쇠를 목적으로 하므로 가장 일반적인 제어기로 비례제어와 미분제어를 들 수 있다.

아래의 주는 비례와 미분제어를 적용한 경우 각각에 대한 폐회로 안정성 분석이다.

**주 3.1 강성제어(비례제어)**

식 (10)의 제어가 식 (17)과 같이 모터와 기어비를

고려한 부하 회전각의 차이에 비례하는 강성제어인 경우를 고려한다.

$$T_m(s) = -K \{ \theta_1(s) - N\theta_L(s) \} \tag{17}$$

식 (16.2)에서 제어기 이득이  $K = \Delta k$ 일 때 폐회로 극점의 미소 변화는 식 (18)과 같다.

$$\frac{\Delta s_k}{\Delta k} = j \frac{1}{2\omega_k} u_{k,1} (u_{k,1} - Nu_{k,n+1}),$$

$$k = 2, \dots, n+1 \tag{18}$$

따라서 폐회로 극점은 허수축을 따라 이동을 시작하며, 다음 식을 만족할 경우 폐회로 극점은 제어기 이득의 증가에 따라 고유진동수가 증가하는 방향으로 이동한다.

$$u_{k,1}(u_{k,1} - Nu_{k,n+1}) > 0, k = 2, \dots, n+1 \tag{19}$$

부록 A의 근궤적 분석의 결과와 같이 식 (19)를 만족하면 개회로의 영점은 두 극점 사이에 존재하게 된다. 따라서 폐회로 극점은 제어이득의 증가에 따라 허수축을 따라 원점에서 멀어지는 방향으로 이동하여 두 극점 사이에 존재하는 영점으로 접근하게 된다.

만일  $\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1} = 0$ 인  $i$ -번째 모드가 존재하면 이 모드는 제어 이득에 관계없으며, 폐회로 극점은 원래의 위치에서 변화가 없다.

만일  $\mu_{i,1}(\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1}) < 0$ 인  $i$ -번째 모드가 존재하면, 이 모드는 고유진동수가 감소하게 된다. 따라서 고유진동수가 증가하는 모드와 감소하는 모드가 존재하면 두 폐회로 극점은 허수축에서 만나게 된다. 이 때의 제어이득을  $k_{cr}$ 라 하면,  $k_{cr} < k$ 의 이득 범위에서 극점은 라플라스 평면의 좌측과 우측으로 분리 이동하게 되어 폐회로가 불안정하게 된다.

정리하면 식 (17)의 제어를 적용했을 때 모든 고유벡터가 식 (19)를 만족하면 폐회로의 모든 극점은 고유진동수가 증가하는 방향으로 이동하며, 따라서 강성이 증가하게 된다. 반대로 식 (19)를 만족하지 못하는 모드가 존재할 경우에는 폐회로 안정성을 보장하지 못한다. 단, 첫 번째 모드의 극점은 원점에서 변화가 없다.

**주 3.2 댐핑제어(미분제어)**

식 (10)의 제어기가 식 (20)과 같이 모터와 기어비를 고려한 부하의 각속도 차이에 비례하는 댐핑제어인 경우를 고려한다.

$$T_m(s) = -Cs\{\theta_1(s) - N\theta_L(s)\} \tag{20}$$

식 (16)에서 제어기 이득이  $C = \Delta c$ 일 때 폐회로 극점의 미소 변화는 식 (21)과 같다.

$$\frac{\Delta s_k}{\Delta c} = -\frac{1}{2}u_{k,1}(u_{k,1} - N u_{k,n+1}),$$

$$k = 2, \dots, n+1 \tag{21}$$

이에 따라 점근안정성 조건은 식 (19)와 같다. 따라서 모든 모드(첫 번째 모드 제외)가 식 (19)를 만족하면 폐회로 극점은 허수축에서 라프라스 평면의 좌평면으로 이동하게 된다.

부록 A의 근궤적 분석의 결과와 같이 식 (19)를 만족하면 개회로의 영점은 두 극점 사이에 존재하므로, 제어이득이 커짐에 따라 근궤적은 허수축에서 출발하여 라프라스 좌평면으로 이동하고 이득이 무한대가 되면 허수축에 있는 개회로 영점에 접근하게 된다. 즉, 진동모드에 감쇠가 발생하게 된다.

앞에서와 같이  $\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1} = 0$ 인  $i$ -번째 모드는 폐회로 제어이득과 관계없이 극점 위치 변화가 없으며,  $\mu_{i,1}(\mu_{i,1} - N\mu_{i,n+1}) < 0$ 인  $i$ -번째 모드는 제어이득의 증가에 따라 라프라스 평면의 우측으로 이동하게 되어 폐회로가 불안정해진다.

**주 3.3 댐핑+강성제어**

식 (10)의 제어기가 식 (22)와 같이 앞의 댐핑제어와 강성제어를 모두 포함하는 경우를 고려한다.

$$T_m(s) = -(Cs + K)\{\theta_1(s) - N\theta_L(s)\} \tag{22}$$

식 (19)를 만족하면 모든 모드의 댐핑과 강성을 증가시킬 수 있다.

식 (19)는 모터와 부하가 서로 반대 방향으로 회전하는 이상(out of phase) 모드인 경우는 자동으로 만족하며, 동일방향으로 회전하는 동상(in phase) 모드일 경우 조건 만족 여부가 중요하다.

앞의 분석에 근거하여 다음의 케이스 분석을 제시한다.

**케이스 1. 1-단 기어**

Fig. 2와 같은 1-단 기어 구동계를 고려한다. 이 구동계의 운동방정식은 식 (23)과 같다.

$$\begin{bmatrix} J_m & 0 \\ 0 & J_{Leq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -N_1 k_1 \\ -N_1 k_1 & N_1^2 k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_m \tag{23}$$

여기서  $J_{Leq} = J_L + N_1^2 J_{1,2}$  이다.

모드해석을 통한 고유치와 고유벡터는 식 (24)와 같다.

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{(J_{Leq} + N_1^2 J_m)}{J_m J_{Leq}} k_1 \tag{24.1}$$

$$u_1 = \begin{Bmatrix} N_1 \\ 1 \end{Bmatrix}, u_2 = \begin{Bmatrix} -J_{Leq} \\ N_1 J_m \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{24.2}$$

식 (19)를  $k = 1, k = 2$ 일 때 나누어 쓰면 식 (25)와 같다.

$$\begin{cases} u_{11}(u_{11} - N_1 u_{12}) = 0 \\ u_{21}(u_{21} - N_1 u_{22}) = \frac{J_{Leq}^2 + N_1^2 J_m J_{Leq}}{N_1^2 J_m^2} > 0 \end{cases} \tag{25}$$

따라서 이 구동계는 식 (22)의 제어를 적용하면 변화가 없는 첫 번째의 기하학적 모드( $k = 1$ )와 감쇠와 강성이 증가한 안정한 두 번째 모드가 존재하므로 안정화가 가능하다.

이는 앞의 논의에서와 같이 두 번째 진동 모드에서 모터와 부하가 서로 이상(out of phase) 진동이므로 당연히 만족하게 된다.

**케이스 2. 2-단 기어**

Fig. 3과 같은 2-단 기어 구동계를 고려한다. 이 구동계의 운동방정식은 식 (26)과 같다.

$$\begin{bmatrix} J \\ J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_m \tag{26}$$

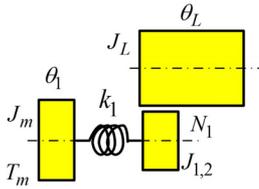


Fig. 2 Schematic of single stage gear driving system

식 (26)에서  $[J]$ 는 관성행렬,  $[K]$ 는 강성행렬이며 다음과 같다.

$$[J] = \text{diag} [J_m \quad J_2 \quad J_{Leq}]$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -N_1 k_1 & 0 \\ -N_1 k_1 & k_2 + N_1^2 k_1 & -N_2 k_2 \\ 0 & -N_2 k_2 & N_2^2 k_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$J_2 = J_{2,1} + N_1^2 J_{1,2}$$

$$J_{Leq} = J_L + N_2^2 J_{2,2}$$

이 구동계에서 모드해석을 통해 고유값과 고유벡터를 해석적으로 구하는 것은 쉽지 않겠지만, 강성행렬의 특징에서 첫 번째 모드는 기하학적모드임을 알 수 있다. 즉 식 (28)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ u_1 = \{N_1 N_2 \quad N_1 \quad 1\}^T \end{cases} \quad (28)$$

또한 기하학적모드를 제외한 진동 모드의 고유벡터를  $u^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}$ 라 하면 그 관계는 다음과 같다.

$$\begin{cases} N_1 N_2 J_m u_1 + N_2 J_2 u_2 + J_{Leq} u_3 = 0 \\ (k_1 - J_m \lambda) u_1 - N_1 k_1 u_2 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

식 (29)를 적용하여 다음 관계를 유도할 수 있다.

$$u_1 (u_1 - N u_3) = -\frac{N_1^2 k_1}{J_{Leq}} \left[ N_2^2 J_m J_2 \lambda - \{J_{Leq} + N_2^2 (J_2 + N_1^2 J_m) k_1\} \right] \quad (30)$$

따라서 식 (19)와 식 (22)에서 강성과 댐핑제어를 적용하여 안정화시키기 위해서는 식 (30)이 양이 되어야 하며, 고유치가 다음 식 (31)을 만족해야 한다.

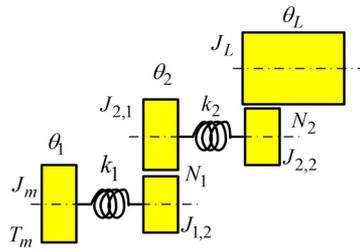


Fig. 3 Schematic of 2-stage gear driving system

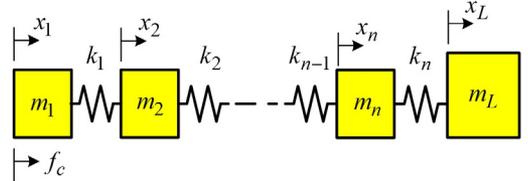


Fig. 4 Schematic of linear driving system

$$\lambda < \frac{J_{Leq} + N_2^2 (J_2 + N_1^2 J_m)}{N_2^2 J_m J_2} k_1 \equiv b \quad (31)$$

2-번째와 3-번째 고유치가 식 (31)을 만족하기 위한 조건은 부록 B의 유도를 통해 다음과 같다.

$$J_{Leq} k_1 > J_m N_2^2 k_2 \quad (32)$$

3-단 이상의 기어구동계에서는 식 (19)를 만족하는 구동계 파라미터의 해석적인 관계를 구하기가 쉽지 않다. 이 경우 수치해석적 모드해석을 통해 안정성 여부를 확인할 수 있다.

결론적으로 다단의 기어트레인을 이용한 기어구동계에서 기어트레인의 진동문제를 피하고 제어하는 방법으로 식 (10) 형태의 제어기 구조를 적용할 수 있다. 단, 이 때는 제어기와 구동계 동특성이 식 (14)의 안정화 조건을 만족해야 된다.

지금까지 분석은 회전 서보제어계를 대상으로 하였으나, 이 결과는 Fig. 4와 같은 직선 서보제어계에도 적용할 수 있다.

Fig. 4의  $(n+1)$ -차의 직선운동계의 운동방정식은 식 (33)과 같다.

$$[M] \ddot{x} + [K] x = [B] f_c \quad (33)$$

여기서  $[M]$ 은 질량행렬,  $[K]$ 는 강성행렬이며  $[B]$ 는

입력벡터,  $\underline{x}$ 는 변수벡터로 식 (34)와 같다.

$$\begin{aligned}
 [J] &= \text{diag}[m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n \quad m_L] \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \\
 [B]^T &= [1 \quad 0_n] \\
 \underline{x}^T &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad x_L]
 \end{aligned} \tag{34}$$

여기서  $\text{diag}[\dots]$ 는 대각행렬(diagonal matrix)이다.

식 (34)의 운동방정식은 식 (2), (3)의 운동방정식에서 기어비를 모두  $N_i = 1, k = 1, \dots, n$ 로 한 경우와 일치한다. 따라서 결과도 유사하다. 즉, 식 (33)의 구동제어계에서 진동 안정화를 위해 식 (35)의 제어입력을 적용할 경우다.

$$F_c(s) = -\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \{x_1(s) - x_L(s)\} \tag{35}$$

이 식에서 사용한 기호의 정의는 식 (10)과 동일하다.

**정리 2.** Fig. 4 또는 식 (33), (34)의 운동방정식을 갖는 시스템에서 식 (35)의 제어를 적용하면 기하학적 모드를 제외한 폐회로 응답은 다음 식 (36)을 만족하면 제어이득  $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 의 범위에서 점근안정성(asymptotic stability)을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 \text{Re} \left[ j \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \{u_{k,1}(u_{k,1} - u_{k,n+1})\} \right] < 0, \\
 k = 2, \dots, n+1
 \end{aligned} \tag{36}$$

여기서  $\text{Re}[*]$ 는 복소수 \*의 실수부를 의미하며,  $\mu_{cr}$ 은  $0 < \mu$ 가 증가함에 따른 폐회로의 근궤적 중 허수축과 처음 교차하는 근궤적이 발생할 때의  $\mu$ 값을 의미한다.

식 (36)은 식 (14)에서  $N = 1$ 을 대입한 결과에 해당된다. 따라서 정리 2의 증명은 증명 1의 방법을 따르면 용이하게 얻을 수 있다.

결론적으로 제어기가 댐핑제어와 강성제어를 모두 포함하는 경우, 즉 식 (37)과 같다.

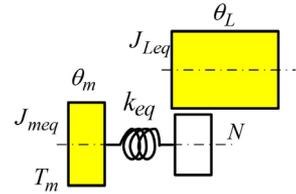


Fig. 5 Schematic of simplified gear driving system

$$F_c(s) = -(Cs + K)\{x_1(s) - x_L(s)\} \tag{37}$$

다음 식 (38)을 만족하면 2번째 모드 이상의 모든 모드에서 댐핑과 강성을 증가시킬 수 있다.

$$u_{k,1}(u_{k,1} - u_{k,n+1}) > 0, k = 2, \dots, n+1 \tag{38}$$

아울러 3-자유도 구동계에서 식 (38)을 만족하기 위한 조건은 식 (39)와 같으며, 이 조건은 식 (32)와 유사하다.

$$m_L k_1 > m_m k_2 \tag{39}$$

### 2.3 기어트레인 모델 단순화 및 구동제어

식 (10)의 제어는 구동계의 무감쇠 모드에 댐핑을 부여하고 강성을 증가시킬 수 있는 제어이며, 부하의 위치나 속도를 제어하기 위한 서보제어는 추가적으로 설계해야 된다.

이를 위한 방법으로, 주어진 시스템이 식 (14)의 조건을 만족하며 기어열 기어의 회전관성이 상대적으로 작은 Fig. 1의 구동계의 경우 Fig. 5와 같이 2-자유도 2-질량계로 단순화하고, 2-질량계를 기준으로 서보제어기를 설계할 수 있다. 이 설계 방법은 후속 논문에서 제안할 예정이다.

## 3. 시뮬레이션 및 결과

앞에서 제안한 제어 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 시뮬레이션을 실시하였으며, 직선운동계가 회전운동계에 비해 상대적으로 설명이 용이하여 Fig. 4의 직선운동계를 선정하였다.

우선 식 (39)의 타당성 검증을 위해 간단한 3-자유도 구동계를 대상으로 시뮬레이션을 하였다.

시뮬레이션에 사용한 계의 파라미터는 Table 1 같이 조건식 (39)를 만족하는 시스템 1과 만족하지 못하는 시스템 2를 고려한다.

**Table 1** System parameters

System	Parameters	Note
1	$m_m = 2$ [kg], $m_2 = 1$ [kg], $m_L = 20$ [kg] $k_1 = 800$ [N/m], $k_2 = 400$ [N/m]	$m_L k_1 > m_m k_2$
2	$m_m = 10$ [kg], $m_2 = 10$ [kg], $m_L = 10$ [kg] $k_1 = 40$ [N/m], $k_2 = 100$ [N/m]	$m_L k_1 < m_m k_2$

**시스템 1:** 이 시스템은 식 (39)를 만족하므로, 조건식 (40)을 만족한다. 이 시스템의 고유치와 해당 고유벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, u_1 &= [0.209 \quad 0.209 \quad 0.209]^T \\ \lambda_2 = 122.9, u_2 &= [-0.596 \quad -0.411 \quad 0.080]^T \\ \lambda_3 = 149.7, u_3 &= [-0.324 \quad 0.888 \quad -0.012]^T \end{aligned} \quad (40)$$

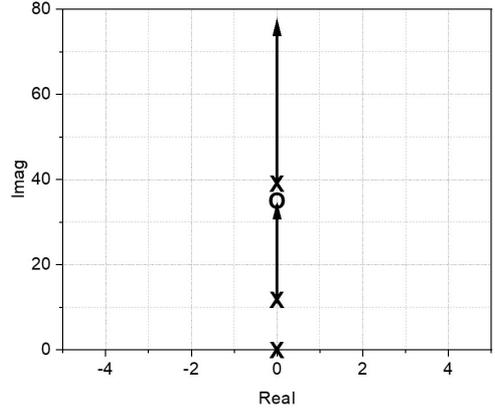
식 (40)에서 첫 번째 모드를 제외한 나머지 고유벡터는 식 (38)을 만족함을 확인할 수 있다.

이 시스템에 식 (37)의 제어를 적용한 경우를 분석한다. Fig. 6은 미분제어 이득은  $C=0$ 이고 비례제어 이득  $K$ 가 영에서 무한대로 증가하는 경우 근궤적이다. 개회로와 폐회로 모든 극점과 영점은 허수축에 있다.

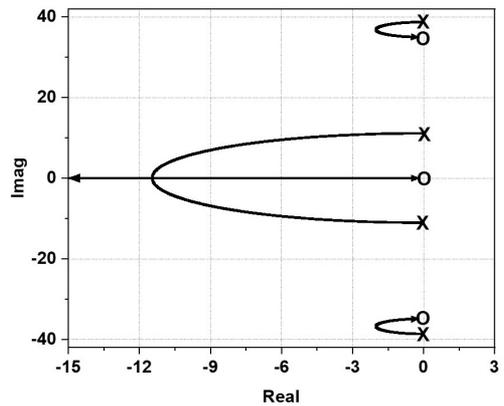
첫 번째 모드의 극점 두 개는 원점에서 이동하지 않으며, 두 번째 극점은 영점으로, 세 번째 극점은 무한대로 접근함을 알 수 있다. 즉, 이득  $K$ 가 증가함에 따라 고유진동수가 증가하게 된다.

Fig. 7은 비례제어 이득은  $K=0$ 이고, 미분제어 이득  $C$ 가 영에서 무한대로 증가하는 경우 근궤적이다. 이 경우도 Fig. 6과 같이 첫 번째 모드의 극점 두 개는 원점에서 이동하지 않으며, 두 번째 극점과 세 번째 극점은 좌평면으로 이동을 시작하여 이득이 무한대가 되면 원점에 있는 영점과 두 극점 사이에 존재하는 영점으로 접근함을 알 수 있다. 즉, 이득  $C$ 가 증가함에 따라 댐핑이 발생하여 폐회로는 점근안정성을 만족함을 알 수 있다.

**시스템 2:** 이 시스템은 식 (39)를 만족하지 못하므로, 조건식 (38)을 만족하지 못한다. 이 시스템의 고유치와 해당 고유벡터는 식 (41)과 같다.



**Fig. 6** Roots locus as increasing P-gain  $K$  (case 1)



**Fig. 7** Roots locus as increasing D-gain  $C$  (system 1)

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, u_1 &= [0.183 \quad 0.183 \quad 0.183]^T \\ \lambda_2 = 5.28, u_2 &= [0.253 \quad -0.081 \quad -0.172]^T \\ \lambda_3 = 22.72, u_3 &= [0.052 \quad -0.245 \quad 0.193]^T \end{aligned} \quad (41)$$

식 (41)에서 세 번째 모드의 고유벡터는 식 (38)을 만족하지 못함을 확인할 수 있다.

시스템 1에서와 같이 식 (37)의 제어를 적용한 경우 비례제어와 미분제어를 적용한 근궤적은 Fig. 8, Fig. 9와 같다. Fig. 8에서 비례제어이득  $K$ 의 증가에 따라 두 번째 극점은 증가하고 세 번째 극점은 감소하여 만나게 된다. 이 때의 이득이  $K_{cr}$ 이며, 이득이 더 증가하면 하나는 좌평면, 나머지 하나는 우평면으로 이동하게 된다. 이 후 근궤적 거동 형태는 Fig. 8과 유사하다. 따라서 이득이  $K_{cr}$ 보다 크면 폐회로는 불안정해진다.

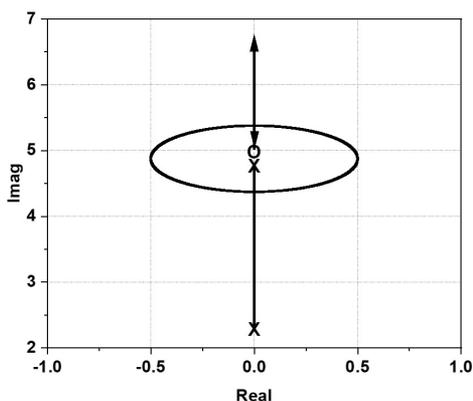


Fig. 8 Roots locus as increasing P-gain  $K$  (system 2)

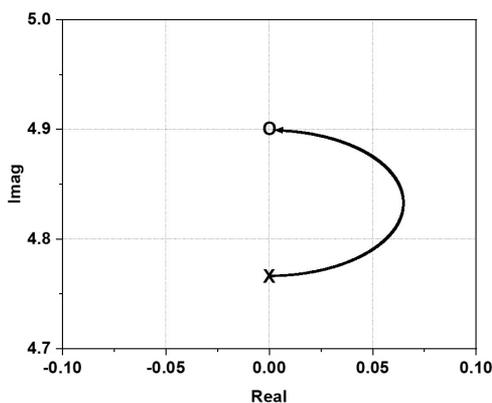


Fig. 9 Roots locus as increasing D-gain  $C$  (system 2)

Fig. 9는 미분제어 이득  $C$ 의 증가에 따른 세 번째 극점의 근궤적을 보인다. 이득  $C$ 의 증가에 따라 극점이 우평면으로 이동하므로 폐회로는 불안정해진다. Fig. 9에는 나타나지 않았지만 두 번째 모드의 극점의 근궤적은 Fig. 7과 유사한 형태를 보이며, 점근안정성을 만족함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

구동원과 부하 사이에 동력전달 메커니즘을 사용하는 간접구동방식에서 동력전달 메커니즘의 강성이 폐회로의 대역폭에 비해 충분히 크지 않을 경우 폐회로의 안정성과 제어 성능 보장을 위해서는 이 강성을 고려한 제어기 설계가 필요하다.

이 논문에서는 다단의 기어열을 갖는 회전구동계에서 모터와 부하의 상대적 운동을 되먹임제어하는

경우의 폐회로 안정조건을 제시하였으며, 이 조건은 직선운동계에도 동일하게 적용할 수 있음을 보였다. 폐회로 안정조건을 타당성은 몇 가지 구동계를 대상으로 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

#### References

- (1) Thosen, S., Hoffmann, N. and Fuchs, F. W., 2010, PI Control, PI-Based State Space Control, and Model-based Predictive Control for Drive Systems with Elastically Coupled Loads-A Comparative Study, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 58, No. 8, pp. 3647~3657.
- (2) Muszynski, R. and Deskur, J., 2009, Damping of Torsional Vibrations in High Dynamic Industrial Drives, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 57, No. 2, pp. 544~552.
- (3) Hori, Y., Sawada, H. and Chun, Y., 1999, Slow Resonance Ratio Control for Vibration Suppression and Disturbance Rejection in Torsional System, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 46, No. 1, pp. 162~168.
- (4) Bähr, A. and Beineke, S., 2007, Mechanical Resonance Damping in an Industrial Servo Drive, 2007 European Conference on Power Electronics and Applications, pp. 1~10.
- (5) Bolognani, S., Venturato, A. and Zigliotto, M., 2000, Theoretical and Experimental Comparison of Speed Controllers for Elastic Two-mass-systems, 2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference, Vol. 3, pp. 1087~1092.
- (6) Debruin, Chen, T., Song, B., Tang, X., Jin, J. and Zhou, X., 2016, Resonance Suppression of Two-mass Drive Systems Considering Compensation of Anti-resonance Character, 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA), pp. 1~6.
- (7) Szabat, K. and Kowalska, T. O., 2007, Vibration Suppression in a Two-Mass Drive System Using PI Speed Controller and Additional Feedbacks-comparative Study, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 54, No. 2, pp. 1193~1206.
- (8) Zhang, G. and Furusho, J., 2000, Speed Control of Two-inertia System by PI/PID control, IEEE Trans.

Ind. Electron., Vol. 47, No. 3, pp. 603~609.

(9) Sugiura, K. and Hori, Y., 1996, Vibration Suppression in 2- and 3-mass System Based on the Feedback of Imperfect Derivative of the Estimated Torsional Torque, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 43, No. 1, pp. 56~64.

(10) Zhang, R., Chen, Z., Yang, Y. and Tong, C., 2007, Torsional Vibration Suppression Control in the Main Drive System of Rolling Mill by State Feedback Speed Controller Based on Extended State Observer, 2007 IEEE International Conference on Control and Automation, pp. 2172~2177.

(11) Kang, M. S., Yoon, W. H. and Lee, J. B., 2011, LOS(line-of-sight) Stabilization Control of OTM(on-the-move) Antenna Driven by Geared Flexible Transmission Mechanism, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 10, pp. 951~959.

(12) Zhang, G. and Furusho, J., 2000, Speed Control of Two-Inertia System by PI/PID Control, IEEE Transactions on industrial electronics, Vol. 47, No. 3, pp. 603~609.

(13) Yang, B. and Mote, C. D., 1992, On Time Delay in Noncolocated Control of Flexible Mechanical System, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 114, No. 3, pp. 409~415.

**부 록**

**부록 A. 근궤적 분석**

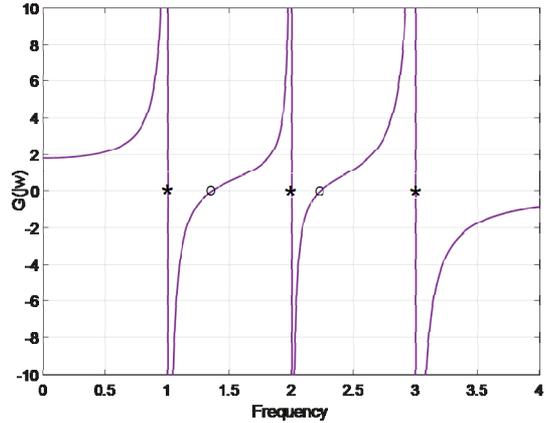
식 (12)에서 폐회로의 특성방정식은 다음과 같다.

$$P(s) = 1 + \mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_{i,1}(u_{i,1} - Nu_{i,n+1})}{s^2 + \lambda_i} = 0 \quad (a.1)$$

(i) 비례제어( $\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = K$ )일 경우 주파수함수는 다음과 같다.

$$P(\omega) = 1 + KG(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_{i,1}(u_{i,1} - Nu_{i,n+1})}{-\omega^2 + \lambda_i}, \quad k=2, \dots, n+1 \quad (a.2)$$



**Fig. A1** Frequency function of  $G(j\omega)$  (3-dof case)

식 (a.2)의 개회로 주파수함수  $G(j\omega)$ 는 실수이며, 분자가 다음 식 (a.3)을 만족하면,

$$u_{k,1}(u_{k,1} - Nu_{k,n+1}) > 0, \quad k=2, \dots, n+1 \quad (a.3)$$

주파수함수는 Fig. A1과 같이 ‘\*’로 표시된 개회로 극점은 모두 허수축에 존재하고, ‘o’로 표시된 영점은 인근 두 극점 사이에 존재하고, 마지막 하나는 무한대에 있다.

(ii) 감쇠제어( $\mu \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = Cs$ )일 경우 주파수함수는 식 (a.4)와 같다.

$$P(\omega) = 1 + CG(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = \sum_{i=1}^{n+1} j\omega \left[ \frac{u_{i,1}(u_{i,1} - Nu_{i,n+1})}{-\omega^2 + \lambda_i} \right] \quad (a.4)$$

식 (a.4)의 개회로 주파수함수  $G(j\omega)$ 는 허수이며, 분자가 식 (a.5)를 만족하면,

$$u_{k,1}(u_{k,1} - Nu_{k,n+1}) > 0, \quad k=2, \dots, n+1 \quad (a.5)$$

주파수함수 (a.4)에서 영점은 원점과 인근의 두 극점 사이에 존재한다.

**부록 B. 식 (33)의 유도**

식 (26)의 모드 해석에서 첫 번째 고유치를 제외한 나머지 고유치는 식 (a.6)을 만족한다.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left\{ \frac{k_1}{J_m} + \frac{(k_2 + N_1^2 k_1)}{J_2} + \frac{N_2^2 k_2}{J_{Leq}} \right\} \lambda + \frac{k_1 k_2}{J_m J_2 J_{Leq}} (J_{Leq} + N_2^2 J_2 + N_2^2 N_1^2 J_m) = 0 \quad (\text{a.6})$$

고유치가 식 (31)의 조건을 충족시키기 위해서는 식 (a.6)의 2-차 방정식의 특징에서  $P(b) > 0$ 을 만족하면 되며, 따라서  $P(b)$ 를 구하고 정리하여 식 (32)를 얻게 된다.



**Min Sig Kang** received a B.S. degree from the Department of Mechanical Engineering of Seoul National University in 1980. He then went on to receive M.S. and Ph.D. degrees from KAIST in 1983 and 1987, respectively. He worked for the Agency for Defence Development during 1987-1998. Dr. Kang is currently a professor of the Department of Mechanical Engineering at Gachon University in Sungnam, Korea. His research interests include dynamic systems measurement and control, industrial robotics, and gyro-stabilized platforms.