

# 이론적 진동모드 특성에 기반한 티모셴코 보의 제2진동수 스펙트럼에 관한 연구

## Second Frequency Spectrum in a Timoshenko Beam Based on Analytic Modal Characteristics

서 민 호\* · 김 용 우†  
Min Ho Seo\* and Yong-Woo Kim†

(Received August 12, 2022 ; Revised September 8, 2022 ; Accepted September 8, 2022)

**Key Words :** Timoshenko Beam(티모셴코 보), Natural Frequency(고유진동수), Eigenfunction(고유진동형), Second Spectrum of Frequencies(제2진동수 스펙트럼)

### ABSTRACT

Expanding on previous studies on Timoshenko beams, further extended dimensionless frequency curves, such as hinged-hinged beam, clamped-clamped beam, clamped-hinged beam, and clamped-free beam, are presented to show that the natural frequencies vary as the inverse of slenderness ratio changes and to investigate the second spectrum of a Timoshenko beam. To obtain the frequency curves, we calculated the natural frequencies in two ways: by solving the frequency equation expressed by natural frequency, and by solving the differential equation employed by Han et al. The latter method does not yield accurate or stable solutions for higher modes, whereas the former does. Therefore, we calculated the higher natural frequencies using the former method and obtained the extended frequency curves as a function of the slenderness ratio. This paper reports findings through careful observation of the extended frequency curves.

### 기 호 설 명

$A$  : 단면적  
 $E$  : 탄성계수  
 $G$  : 전단탄성계수  
 $I$  : 단면 관성모멘트  
 $L$  : 보의 길이  
 $s$  : 세장비  
 $\kappa$  : 전단수정계수  
 $\rho$  : 밀도

$\omega_n$  :  $n$ 번째 고유진동수  
 $\omega_n^*$  :  $n$ 번째 무차원 고유진동수  
 $\omega_c$  : 임계진동수  
 $\omega_c^*$  : 무차원 임계진동수

### 1. 서 론

Timoshenko 보의 자유진동 운동방정식의 해는 고유진동수에 따라 두 가지로 표현된다. 하나는 고유진

† Corresponding Author ; Member, School of Mechanical and Aerospace Engineering, Sunchon National University, Professor  
E-mail : kyw@scnu.ac.kr

\* Department of Mechanical Engineering, Graduate School, Sunchon National University, Former Graduate Student

‡ Recommended by Editor Pyung Sik Ma  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

동수가 임계진동수,  $\omega_c = \sqrt{\kappa GA/\rho I}$ 보다 작은 경우 삼각함수와 쌍곡선함수로 표현되는 해이며, 다른 하나는 고유진동수가 임계진동수보다 큰 경우 삼각함수들만으로 표현되는 해이다. 이로 인해 양단 단순보와 양단 자유보에서는 임계진동수보다 큰 고유진동수의 고유진동형이 변화하고, 고유진동수가 다름에도 불구하고 동일한 고유진동형을 갖는 현상을 보인다. Trall-Nash and Collar<sup>(1)</sup>는 양단 단순보와 양단 자유보에서 고유진동수가 임계진동수보다 클 때 나타나는 이와 같은 변화를 진동수의 제2스펙트럼(a second spectrum of frequencies)의 도입에 기인하는 것으로 해석하였다. 따라서 제2스펙트럼(the second spectrum)은 저차 모드에서 나타났던 고유진동형과 동일한 진동형이 고차 모드에서 다시 나타나는 고차 진동수들의 집합을 의미한다. 이러한 현상에 대한 증거를 찾고 물리적 의미를 이해하고자 한 세기 동안 여러 학자들에 의해 지속적으로 연구가 이어지고 있다<sup>(1-9)</sup>. Anderson<sup>(2)</sup>과 Dolph<sup>(3)</sup>는 양단 단순보와 양단 자유보에서의 두 가지 스펙트럼을 확인하였으나, 다른 경계 조건을 갖는 보들에서는 제2스펙트럼을 정확한 분류하는데 어려움이 있다고 보고하였다. Abbas and Thomas<sup>(4)</sup>는 세 가지 보이론(Euler-Bernoulli beam, simple shear beam, pure shear beam)과 티모셴코 보에 대한 유한요소 해석을 통하여,  $s^{-1}$ (세장비의 역수) 값이  $0 \leq s^{-1} \leq 0.16$ 의 범위에서 변함에 따라 네 가지의 보(양단 단순보, 양단 고정보, 외팔보, 자유-자유보)의 고유진동수가 어떻게 변화하는지를 나타내는 고유진동수 곡선들을 제시하였다. 그들은 유한요소 해석을 통해 양단 단순보에는 제2스펙트럼뿐만 아니라 순수전단진동(pure shear oscillation)도 존재함을 확인하였으며, 양단 단순보를 제외한 다른 보에서는 제2스펙트럼이 존재하지 않는다고 주장하였다. 그 후 Bhashyam and Prathap<sup>(5)</sup>은 유한요소 해석을 통해 Thomas and Abbas<sup>(4)</sup>의 결론(“양단 단순보를 제외한 다른 보에서는 제2스펙트럼이 존재하지 않는다”)에 대해 검토하고, 고유진동수들을 고유진동형에 따라  $w$  mode (Euler-Bernoulli 굽힘모드(flexural modes))와  $\theta$  mode(전단 진동(shear oscillation)이 지배적 모드)로 분류할 수 있음을 보이면서 고유진동수들을 다음과 같이 분류하였다. 고유진동수가 임계진동수보다 작은 영역에서는  $w$  mode (Euler-Bernoulli 굽힘모드

와 단순 전단이 지배적인 모드)로 구성된 제1스펙트럼이 나타나고, 고유진동수가 임계진동수보다 큰 영역에서는  $w$  mode(단순 전단이 지배적인 모드)로 구성된 제1스펙트럼과  $\theta$  mode(순수전단이 지배적인 모드)로 구성된 제2스펙트럼 나타난다고 보고하였다. 또한 그들은 네 가지의 보(양단 단순보, 양단 고정보, 단순-고정보 및 외팔보)에 대하여, Abbas and Thomas<sup>(4)</sup>와 같이 세 가지 보이론(Euler-Bernoulli beam, simple shear beam, pure shear beam)과 티모셴코 보의 유한요소 해석을 통해  $s^{-1}$ 의 값이  $0 \leq s^{-1} \leq 0.12$ 의 범위에서 변함에 따라 고유진동수가 어떻게 변화하는지를 나타내는 고유진동수 곡선들을 제시하고, 고유진동수들이 두 가지의 스펙트럼으로 분리됨을 설명하였다. 그러나 그들이 제시한 고유진동수 곡선을 Abbas and Thomas<sup>(4)</sup>의 것과 비교하면, 양단 단순보를 제외한 양단 고정보 및 외팔보의 고유진동수 곡선은 차이를 보인다.

Han 등<sup>(6)</sup>은 무차원 파수(dimensionless wave number)를 미지수로 하는 티모셴코 보의 진동수 방정식을 유도하여 Runge-Kutta method를 이용하여  $s^{-1}$ 값의 변화에 따른 네 가지 보에 대한 고유진동수 곡선들(frequency curve)을 보 하나당 4개씩 도출하여  $s^{-1}$ 값이 변화함에 따라 고유진동수가 어떻게 변화하는지 설명하였다.

이 연구에서는 유한요소 해석을 사용하지 않고 이론적 계산을 사용하여 도출한 Han 등<sup>(6)</sup>의 고유진동수 곡선보다 더 많은 고유진동수 곡선들을 구하고 이를 바탕으로  $s^{-1}$ 의 값에 따른 고유진동수의 분포 및 제2스펙트럼의 존재에 대해 조사하고자 한다. 이를 위해, Han 등<sup>(6)</sup>과 동일하게 무차원 파수를 미지수로 하는 고유진동수 방정식에 Runge-Kutta method를 적용하여 4가지 보에 대해 무차원 파수를 계산하고 이를 이용하여 고유진동수 곡선을 작성하였다. 그러나 처음 4개의 고유진동수 곡선 이후의 고차의 고유진동수 곡선들은 해의 정확성과 수렴도가 불량하여 정확히 계산되지 않았다. 이러한 사실이 아마도 Han 등<sup>(6)</sup>이 처음 4개의 고유진동수 곡선만을 제시한 이유인 것으로 추측된다. 이를 보완하기 위해 티모셴코 보의 운동방정식으로부터 유도한 고유진동수 방정식(고유진동수가 미지수)<sup>(10,11)</sup>을 사용하여 12개의 고유진동수 곡선을 작성하였다. 그 결과, 두 가지 방법으로 구한 처음 4개의 고유진동수 곡선들이 모두 일치하였다. 이 연구에서는 확장된 고유진동수 곡선을 바탕으로

로 세장비의 역수의 변화에 따른 고유진동수, 정규화된 고유진동형, 그리고 제2스펙트럼에 대해 분석하고 검토하여 새로 발견한 현상들을 기술하였다.

## 2. 티모센코 보의 고유진동수와 고유모드

### 2.1 자유진동 운동방정식

임의 위치  $x$ 와 시간  $t$ 에서의 보의 변위, 회전각을 각각  $y(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$ 라 표기하면, 자유진동시의 티모센코 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \kappa GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) \right\} = 0 \tag{1}$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial EI \theta}{\partial x} \right) - \kappa GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) = 0 \tag{2}$$

여기서  $\rho A$ 는 단위 길이 당 질량,  $\rho I$ 는 단위 길이 당 중립축에 대한 질량관성모멘트,  $EI$ 는 굽힘강성,  $\kappa GA$ 는 전단강성을 나타낸다.

### 2.2 직교조건

식 (1), (2)에서  $\rho A$ ,  $I\rho$ ,  $\kappa GA$ ,  $EI$ 가 모두 상수일 때, 운동방정식의 해를 다음과 같이 가정하여,

$$y(x,t) = Y(x) T(t) \tag{3}$$

$$\theta(x,t) = \Theta(x) T(t), \tag{4}$$

식 (3)과 식 (4)를 식 (1)과 식 (2)에 대입하고 변수 분리하면 다음과 같은 세 개의 상미분방정식을 얻는다.

$$\ddot{T} + (\omega)^2 T = 0 \tag{5}$$

$$-\kappa GA Y'' + \kappa GA \Theta' - (\omega)^2 \rho A Y = 0 \tag{6}$$

$$-\kappa GA Y' - EI \Theta'' + \kappa GA \Theta - (\omega)^2 \rho I \Theta = 0 \tag{7}$$

여기서 문자 위의 점(dot)은 시간에 관한 미분을 의미하고, 상첨자 프라임(prime)은  $x$ 에 관한 미분을 의미한다. 그리고  $\omega$ 는 고유진동수이고  $Y$ 와  $\Theta$ 는 고유모드이다. 식 (6)과 식 (7)을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$[L] \begin{pmatrix} Y \\ \Theta \end{pmatrix} - (\omega)^2 [M] \begin{pmatrix} Y \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

여기서  $[L]$ 와  $[M]$ 는 식 (9), (10)과 같다.

$$[L] = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{d^2}{dx^2} & \kappa GA \frac{d}{dx} \\ -\kappa GA \frac{d}{dx} & -EI \frac{d^2}{dx^2} + \kappa GA \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \tag{10}$$

$r$ 번째 고유모드  $([Y_r \ \Theta_r]^T)$ 와  $s$ 번째 고유모드  $([Y_s \ \Theta_s]^T)$ 를 식 (8)에 각각 대입하여 얻은 두 식을 이용하면 전통적 경계조건(단순지지, 고정, 자유)을 만족시키는  $Y(x)$ 와  $\Theta(x)$ 에 대해 식 (11), (12)와 같은 티모센코 보의 직교조건을 얻는다<sup>(12)</sup>.

$$\int_0^L [Y_r \ \Theta_r] [M] \begin{pmatrix} Y_s \\ \Theta_s \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq s \\ m_r & \text{for } r = s \end{cases} \tag{11}$$

$$\int_0^L [Y_r \ \Theta_r] [L] \begin{pmatrix} Y_s \\ \Theta_s \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq s \\ k_r & \text{for } r = s \end{cases} \tag{12}$$

식 (11), (12)의 고유진동형  $[Y_r \ \Theta_r]^T$ 은 식 (13), (14)와 같이 정규화 할 수 있다.

$$\int_0^L [\tilde{Y}_r \ \tilde{\Theta}_r] [M] \begin{pmatrix} \tilde{Y}_s \\ \tilde{\Theta}_s \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq s \\ 1 & \text{for } r = s \end{cases} \tag{13}$$

$$\int_0^L [\tilde{Y}_r \ \tilde{\Theta}_r] [L] \begin{pmatrix} \tilde{Y}_s \\ \tilde{\Theta}_s \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq s \\ (\omega_r)^2 & \text{for } r = s \end{cases} \tag{14}$$

여기서  $\tilde{Y}_r(x)$  및  $\tilde{\Theta}_r(x)$ 는 정규화된 고유진동형(normalized eigenfunction)이다.

### 2.3 고유진동형과 고유진동수 방정식

식 (6), (7)의 해를 식 (15), (16)과 같이 가정한다.

$$Y(x) = W_1 e^{mx} \tag{15}$$

$$\Theta(x) = W_2 e^{mx} \tag{16}$$

가정한 해를 식 (6)과 식 (7)에 대입하여 정리하고 행렬로 표현하면 식 (17)과 같다.

$$\begin{bmatrix} -(m^2 + a) & m \\ -cm & -(m^2 + b) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

여기서,  $a = \frac{\omega^2 \rho A}{\kappa GA}$ ,  $b = \frac{\omega^2 \rho I - \kappa GA}{EI}$ ,  $c = \frac{\kappa GA}{EI}$ 이다.

그런데  $W_1$ 와  $W_2$ 는 모두 0이 될 수 없으므로 (만일 0일 경우 식 (15), (16)에서 가정한  $Y(x)$  및  $\Theta(x)$ 는 모두 0이 된다.), 식 (17)의 계수행렬의 행렬식은 0이 되어야 한다. 즉,

$$m^4 + dm^2 + e = 0 \tag{18}$$

여기서

$$d = a + b + c = \omega^2 \left( \frac{\rho A}{\kappa GA} + \frac{\rho I}{EI} \right) \tag{19}$$

$$e = ab = \frac{\omega^2 \rho A}{\kappa GA} \left( \frac{\omega^2 \rho I - \kappa GA}{EI} \right) \tag{20}$$

이다.

$m^2 \neq 0$ 일 때 식 (17)과 식 (18)을 만족하는 0이 아닌  $[W_1 \ W_2]^T$ 는  $[m \ m^2 + a]^T$ 이다<sup>(11)</sup>. 따라서  $m^2 \neq 0$ 일 때, 식 (15)와 식(16)의  $Y(x)$ ,  $\Theta(x)$ 는 식 (21)과 같은 형태이다.

$$\begin{pmatrix} Y(x) \\ \Theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m^2 + a \end{pmatrix} e^{mx} \tag{21}$$

그런데  $m^2 \neq 0$ 일 때, 식 (18)의 근은 식 (22)와 같다.

$$m^2 = \begin{cases} (m_a)^2 = \frac{-d + \sqrt{\Delta}}{2} \\ (m_b)^2 = \frac{-d - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \tag{22}$$

여기서  $\Delta = d^2 - 4e$ 이고 항상 양수이다.  $(m_b)^2$ 은 항상 음수이나  $(m_a)^2$ 은 그렇지 않다. 따라서 근은  $(m_a)^2$ 이 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 고려한다.  $(m_a)^2 = 0$ 에 대응하는 진동수를 임계진동수 (critical frequency)라 하며 식 (23)과 같이 정의된다.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}} \tag{23}$$

(1)  $(m_a)^2 > 0$ 일 경우, 즉  $\omega < \omega_c$ 일 때: 식 (18)의 4개의 근은 식 (24)와 같다.

$$m = \begin{cases} m_1 = \sqrt{\frac{-d + \sqrt{\Delta}}{2}} = r_1 \\ m_2 = -\sqrt{\frac{-d + \sqrt{\Delta}}{2}} = -r_1 \\ m_3 = j\sqrt{\frac{d + \sqrt{\Delta}}{2}} = jr_2 \\ m_4 = -j\sqrt{\frac{d + \sqrt{\Delta}}{2}} = -jr_2 \end{cases} \tag{24}$$

여기서  $j$ 는 허수 단위이다. 따라서  $Y(x)$ 와  $\Theta(x)$ 의 일반해는 식 (25)와 같다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y(x) \\ \Theta(x) \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ (r_1)^2 + a \end{pmatrix} e^{r_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} -r_1 \\ (-r_1)^2 + a \end{pmatrix} e^{-r_1 x} \\ &\quad + C_3 \begin{pmatrix} jr_2 \\ (jr_2)^2 + a \end{pmatrix} e^{jr_2 x} + C_4 \begin{pmatrix} -jr_2 \\ (-jr_2)^2 + a \end{pmatrix} e^{-jr_2 x} \\ &= A \begin{pmatrix} \sinh(r_1 x) \\ \frac{a + (r_1)^2}{r_1} \cosh(r_1 x) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cosh(r_1 x) \\ \frac{a + (r_1)^2}{r_1} \sinh(r_1 x) \end{pmatrix} \\ &\quad + C \begin{pmatrix} \sin(r_2 x) \\ -\frac{a - (r_2)^2}{r_2} \cos(r_2 x) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \cos(r_2 x) \\ \frac{a - (r_2)^2}{r_2} \sin(r_2 x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

여기서  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 임의의 상수들이고,  $A, B, C, D$ 는  $A = (C_1 + C_2)r_1, B = (C_1 - C_2)r_1, C = -(C_3 + C_4)r_2, D = (C_3 - C_4)(jr_2)$ 로써 임의의 상수들이다.

(2)  $(m_b)^2 < 0$ 일 경우, 즉  $\omega > \omega_c$ 일 때: 식 (18)의 4개의 근은 식 (26)과 같다.

$$m = \begin{cases} m_1 = j\sqrt{\frac{d - \sqrt{\Delta}}{2}} = jp_1 \\ m_2 = -j\sqrt{\frac{d - \sqrt{\Delta}}{2}} = -jp_1 \\ m_3 = j\sqrt{\frac{d + \sqrt{\Delta}}{2}} = jp_2 \\ m_4 = -j\sqrt{\frac{d + \sqrt{\Delta}}{2}} = -jp_2 \end{cases} \tag{26}$$

따라서  $Y(x)$ 와  $\Theta(x)$ 의 일반해는 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y(x) \\ \Theta(x) \end{pmatrix} &= \overline{C}_1 \begin{pmatrix} jp_1 \\ (jp_1)^2 + a \end{pmatrix} e^{jp_1 x} + \overline{C}_2 \begin{pmatrix} -jp_1 \\ (-jp_1)^2 + a \end{pmatrix} e^{-jp_1 x} \\ &\quad + \overline{C}_3 \begin{pmatrix} jp_2 \\ (jp_2)^2 + a \end{pmatrix} e^{jp_2 x} + \overline{C}_4 \begin{pmatrix} -jp_2 \\ (-jp_2)^2 + a \end{pmatrix} e^{-jp_2 x} \\ &= \overline{A} \begin{pmatrix} \sin(p_1 x) \\ -\frac{a - (p_1)^2}{p_1} \cos(p_1 x) \end{pmatrix} + \overline{B} \begin{pmatrix} \cos(p_1 x) \\ \frac{a - (p_1)^2}{p_1} \sin(p_1 x) \end{pmatrix} \\ &\quad + \overline{C} \begin{pmatrix} \sin(p_2 x) \\ -\frac{a - (p_2)^2}{p_2} \cos(p_2 x) \end{pmatrix} + \overline{D} \begin{pmatrix} \cos(p_2 x) \\ \frac{a - (p_2)^2}{p_2} \sin(p_2 x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

여기서  $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, \overline{C}_4$ 는 임의의 상수들이고,  $\overline{A},$

$\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ 는  $\bar{A} = -(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)p_1$ ,  $\bar{B} = (\bar{C}_1 - \bar{C}_2)jp_1$ ,  $\bar{C} = -(\bar{C}_3 + \bar{C}_4)p_2$ ,  $\bar{D} = (\bar{C}_3 - \bar{C}_4)(jp_2)$ 로서 임의의 상수들이다.

식 (25)와 식 (27)의 임의의 상수들은 각각 다음의 경계조건들에 의해 결정된다.

- 고정단에서의 경계조건;

$$Y = 0, \tag{28}$$

$$\theta = 0. \tag{29}$$

- 단순지지단에서의 경계조건;

$$Y = 0, \tag{30}$$

$$EI\theta' = 0. \tag{31}$$

- 자유단에서의 경계조건;

$$EI\theta' = 0, \tag{32}$$

$$\kappa GA(Y' - \theta) = 0. \tag{33}$$

Fig. 1의 보들에 위의 경계조건들(식 (28)~(33))을 식 (25)와 식 (27)에 적용하면 각 보의 고유진동수 방정식 및 고유진동형을 구할 수 있다. 그 결과들을 Table 1과 Table 2에 각각 정리하였다.

### 3. 계산 및 검토

$s^{-1}$ 의 변화에 따른 고유진동수 분포순서가 어떻게 변화하는지 고찰하기 위해, Fig. 1의 네 가지 보에 대하여  $s^{-1}$ 의 변화에 따른 고유진동수 곡선들을 구하여 고유진동수 및 고유진동수의 분포순서를 조사한다. 이를 위해 Fig. 2 및 Table 3과 같은 보에 대하여 고려한다.

이 연구에서는  $s^{-1}$ 의 값에 변화를 주기 위해, Table 3의 (a)에 있는 물성치와 보의 길이를 고정시켜 사용하였으며 Table 3의 (b)에 있는 단면의 기하학적 데이터들을 변화시켰다.

#### 3.1 양단 단순보

기하학적 데이터를 변화시켜 얻는 세장비의 역수 ( $s^{-1}$ )와 무차원 고유진동수<sup>(6)</sup>( $\omega_n^* = \omega_n L \sqrt{\rho/E}$ )의 관계를 Fig. 3에 도시하였다.

Fig. 3에서 실선 및 점선의 곡선들은 Han 등<sup>(6)</sup>이 제안한 방법을 사용하여 계산한 결과이다. 이 중 파란 실선( $s^{-1}$ 가 증가함에 따라 감소하는 쌍곡선 형태의 맨

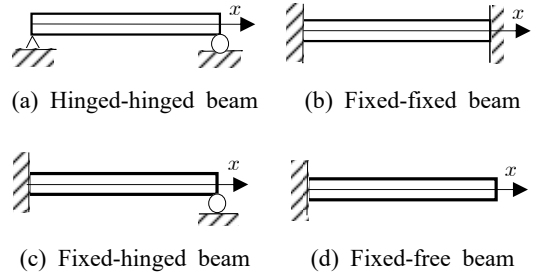


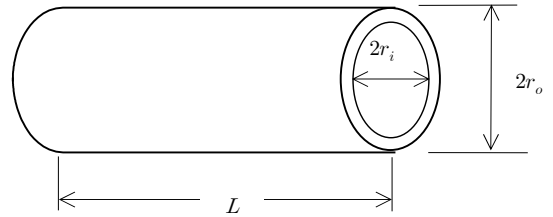
Fig. 1 Four test models

Table 1 Frequency equations of the beams

Hinged-hinged beam	
When $\omega < \omega_c$	$\sin r_2 L = 0$
When $\omega > \omega_c$	$\sin p_1 L \sin p_2 L = 0$
Fixed-hinged beam	
When $\omega < \omega_c$	$\frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} \cosh r_1 L \sin r_2 L + \sinh r_1 L \cos r_2 L = 0$
When $\omega > \omega_c$	$-\frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \cos p_1 L \sin p_2 L + \sin p_1 L \cos p_2 L = 0$
Fixed-fixed beam	
When $\omega < \omega_c$	$\left\{ \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \left( \frac{a + (r_1)^2}{a - (r_2)^2} \right) - \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \left( \frac{a - (r_2)^2}{a + (r_1)^2} \right) \right\} \sinh r_1 L \sin r_2 L + 2 \cosh r_1 L \cos r_2 L = 2$
When $\omega > \omega_c$	$\left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{a - (p_1)^2}{a - (p_2)^2} \right) + \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \left( \frac{a - (p_2)^2}{a - (p_1)^2} \right) \right\} \sin p_1 L \sin p_2 L + 2 \cos p_1 L \cos p_2 L = 2$
Fixed-free beam	
When $\omega < \omega_c$	$\left( \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \sinh r_1 L \sin r_2 L + \left( \frac{a + (r_1)^2}{a - (r_2)^2} + \frac{a - (r_2)^2}{a + (r_1)^2} \right) \cosh r_1 L \cos r_2 L = 2$
When $\omega > \omega_c$	$\left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) \sin p_1 L \sin p_2 L + \left( \frac{a - (p_1)^2}{a - (p_2)^2} + \frac{a - (p_2)^2}{a - (p_1)^2} \right) \cos p_1 L \cos p_2 L = 2$

**Table 2** Natural modes of the beams: the relations between coefficients in Eq. (25) and Eq. (27)

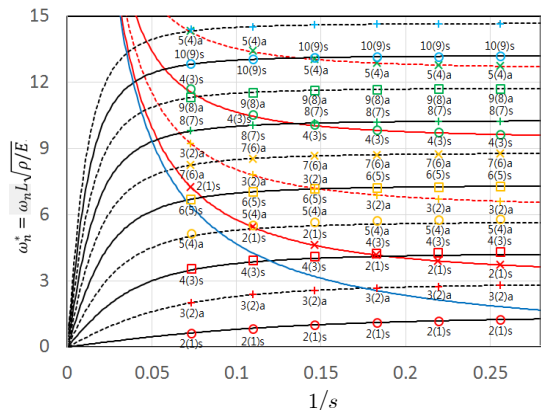
Hinged-hinged beam			
$\omega < \omega_c$	$B = 0,$	$C = -\frac{\sinh r_1 L}{\sinh r_2 L} A,$	$D = 0$
$\omega > \omega_c$	$\bar{B} = 0,$	$\bar{C} = -\frac{\sin p_1 L}{\sin p_2 L} \bar{A},$	$\bar{D} = 0$
Fixed-hinged beam			
$\omega < \omega_c$	$B = -\frac{\sinh r_1 L + \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} \sinh r_2 L}{\cosh r_1 L - \cos r_2 L} A,$		
	$C = \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} A, \quad D = -B$		
$\omega > \omega_c$	$\bar{B} = -\frac{\sin p_1 L - \frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \sin p_2 L}{\cos p_1 L - \cos p_2 L} \bar{A},$		
	$\bar{C} = -\frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \bar{A}, \quad \bar{D} = -\bar{B}$		
Fixed-fixed beam			
$\omega < \omega_c$	$B = -\frac{\sinh r_1 L + \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} \sinh r_2 L}{\cosh r_1 L - \cos r_2 L} A,$		
	$C = \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} A, \quad D = -B$		
$\omega > \omega_c$	$\bar{B} = -\frac{\sin p_1 L - \frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \sin p_2 L}{\cos p_1 L - \cos p_2 L} \bar{A},$		
	$\bar{C} = -\frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \bar{A}, \quad \bar{D} = -\bar{B}$		
Fixed-free beam			
$\omega < \omega_c$	$B = -\frac{\{a + (r_1)^2\} \sinh r_1 L + \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} \sinh r_2 L}{\{a + (r_1)^2\} \cosh r_1 L - \{a - (r_2)^2\} \cos r_2 L} A,$		
	$C = \frac{r_2 \{a + (r_1)^2\}}{r_1 \{a - (r_2)^2\}} A, \quad D = -B$		
$\omega > \omega_c$	$\bar{B} = -\frac{\{a - (p_1)^2\} \sin p_1 L - \frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \sin p_2 L}{\{a - (p_1)^2\} \cos p_1 L - \{a - (p_2)^2\} \cos p_2 L} \bar{A},$		
	$\bar{C} = -\frac{p_2 \{a - (p_1)^2\}}{p_1 \{a - (p_2)^2\}} \bar{A}, \quad \bar{D} = -\bar{B}$		



**Fig. 2** Geometry of beam with hollow circular cross section

**Table 3** Material properties and geometrical data of the beam in Fig. 2

(a) Material properties and beam length
Young's modulus, $E = 200$ GPa
Modulus of rigidity, $G = 7.7519 \times 10^{10}$ GPa
Poisson's ratio, $\nu = 0.29$
Density; $\rho = 7830$ kg/m <sup>3</sup>
Length of beam, $L = 1$ m
(b) Cross-sectional data and shear correction factor
Inner radius, $r_i$ [m]
Outer radius, $r_o$ [m]
Cross-sectional area, $A$ [m <sup>2</sup> ]
Area moment of inertia w.r.t. neutral axis, $I$ [m <sup>4</sup> ]
Slenderness ratio, $s = L\sqrt{A/I}$
Shape coefficient <sup>(13)</sup> or shear correction factor
$\kappa = \frac{6(r_i^2 + r_o^2)^2(1 + \nu)^2}{7r_i^4 + 34r_i^2r_o^2 + 7r_o^4 + (12\nu + 4\nu^2)(r_i^4 + 4r_i^2r_o^2 + r_o^4)}$



**Fig. 3** The dimensionless natural frequency curves for the hinged-hinged beam

아래쪽 곡선)은 임계진동수( $\omega_c$ )에 대응하는 무차원 임계진동수( $\omega_c^* = \omega_c L \sqrt{\rho/E}$ ) 곡선이다. 그리고 이산적 값(0, +, □, X, \* 등으로 표시)들은 2장에서 제시한 고유진동수 방정식을 이용하여 계산한 값들이다. 또한 변위 및 회전각의 정규화된 고유진동형의 특징 {변위 고유진동형( $\tilde{Y}$ )의 절점 수(number of nodes), 회전각 고유진동형( $\tilde{\Theta}$ )의 절점 수, 고유진동형의 형태(대칭 또는 반대칭)}를 Fig. 3에서 각각의 해당 고유진동수에 부기하였다. 예를 들면 변위의 고유진동형의 절점이 2개이고, 회전각 진동형의 절점이 1개, 변위 고유진동형의 형태가 대칭형(symmetric mode)일 경우, ‘2(1)s’로 표기하였다. 그리고 변위 고유진동형의 절점이 3개, 회전각 고유진동형의 절점이 2개, 그리고 변위의 진동형이 반대칭형(anti-symmetric mode)일 경우 ‘3(2)a’로 표기하였다.

Fig. 3으로부터 다음의 사실을 확인할 수 있다. 첫째, 두 방법으로 얻은 무차원 고유진동수의 분포가 정확히 일치한다.

둘째, 쌍곡선 형태의 고유진동수 곡선과 단순증가 형태의 고유진동수 곡선들이 상호 교차한다. 그러나 동일한 무차원 고유진동수 곡선상에 존재하는 고유진동형은 모두 동일하다.

셋째,  $s^{-1}$ 의 값에 따라서 오일러 보에서 볼 수 있는 고유진동형의 분포순서와는 전혀 다름을 알 수 있다. 일반적으로 오일러 보에서와 같이 변위의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )은 고유진동수가 증가함에 따라 ‘대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭’의 순서로 대칭 모드와 반대칭 모드가 교대로 분포한다. 그러나 티모센코 보에서는  $s^{-1}$ 이 변함에 따라 오일러 보에서 보여준 분포와 다른 분포순서를 보인다. 예를 들면,  $s^{-1}=0.1097$ 일 때 변위의 고유진동형은 ‘대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-반대칭’의 순서로 분포하고 (Fig. 3 참조),  $s^{-1}=0.1828$ 일 때의 변위 고유진동형( $\tilde{Y}$ )은 ‘대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-반대칭’과 같은 순서로 분포함을 확인할 수 있다. 즉, 고유진동수가 증가함에 따라 나타나는 고유진동형 형태(대칭 또는 반대칭)의 순서가 불규칙하다.

넷째, 저차 모드에서 나타났던 변위의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )이 고차모드에서 다시 나타난다. 즉, 서로 다른 고유진동수임에도 불구하고 동일한 변위의 고유진동형

( $\tilde{Y}$ )이 2개씩 나타난다. 이에 따라 고유진동수를 두 부류로 분류하고 있다. 하나는 저차 모드에서 처음으로 나타나는 고유진동형들의 집합으로서 이에 속하는 고유진동수들을 제1스펙트럼이라 부른다. 다른 하나는 저차 모드에서 이미 나타난 동일한 고유진동형이 다시 나타나는 고유진동수들의 집합으로서 제2스펙트럼이라 부른다. 이와 같은 현상을 보이기 위해,  $s^{-1}=0.1097$  및  $s^{-1}=0.1828$ 일 때의 처음 12개의 모드들에 대하여 진동수들을 제1스펙트럼과 제2스펙트럼으로 분류하여 각각 Table 4와 Table 5에 정리하였다. Table 4와 Table 5에서  $n$ 은 고유진동수가 증가하는 순의 일련번호로서 고유진동수의 모드 번호(mode number)를 의미한다.

Table 4에서  $s^{-1}=0.1097$ 일 때의 변위의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )을 보면,  $n=1$ 일 때와  $n=4$ 일 때 동일한 고유진동형의 절점 수 2(1)를 가진다. 여기서,  $n=1$ 의 고유진동수는 제1스펙트럼에 속하고,  $n=4$ 의 고유진동수는 제2스펙트럼에 속한다.  $n=2$ 와  $n=7$ 의 고유진동형들의 절점수가 3(2)로 동일하며,  $n=2$ 의 진동수는 제1스펙트럼,  $n=7$ 의 진동수는 제2스펙트럼에 속한다.

또한, Table 5에서  $n=1, 2, 4, 5$ 일 때의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )의 특징(절점 수 및 대칭 또는 반대칭)은 각각  $n=3, 6, 9, 12$ 일 때의 고유진동형의 특징과 일치한다.

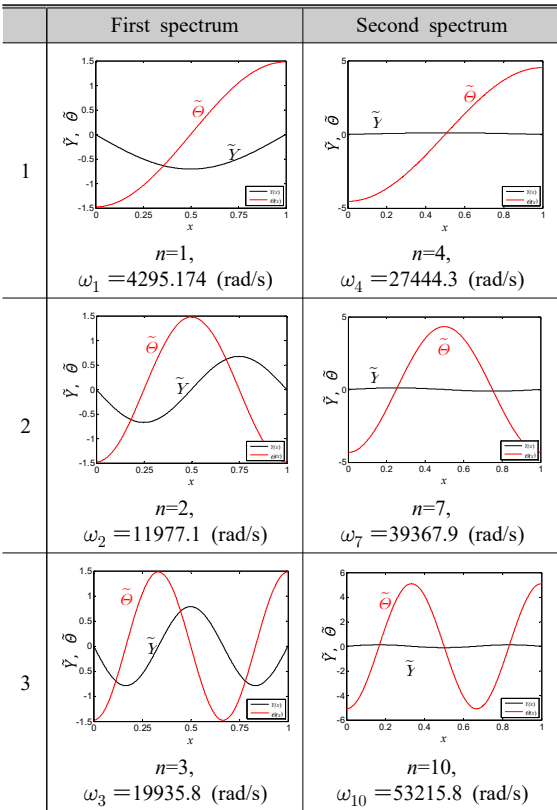
**Table 4** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the hinged-hinged beam for  $s^{-1}=0.1097$

$n$	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$	$\omega_n$		$\omega_n$	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$
1	2(1)s	4295.17			
2	3(2)a	11977.2			
3	4(3)s	19935.8			
			21553.1		
4				27444.3	2(1)s
5	5(4)a	27784.4			
6	6(5)s	35520.6			
7				39367.9	3(2)a
8	7(6)a	43176.5			
9	8(7)s	50777.0			
10				53215.8	4(3)s
11	9(8)a	58338.9			
12	10(9)s	65873.2			

**Table 5** Natural frequencies (rad/s) of the hinged-hinged beam for  $s^{-1}=0.1828$

n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$	$\omega_n$		$\omega_n$	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$
1	2(1)s	5600.27	12931.9		
2	3(2)a	13539.8			
3				21048.6	2(1)s
4	4(3)s	21312.4			
5	5(4)a	28949.1			
6				34824.3	3(2)a
7	6(5)s	36511.8			
8	7(6)a	44032.3			
9				49778.7	4(3)s
10	8(7)s	51527.0			
11	9(8)a	59004.9			
12				65150.6	5(4)a

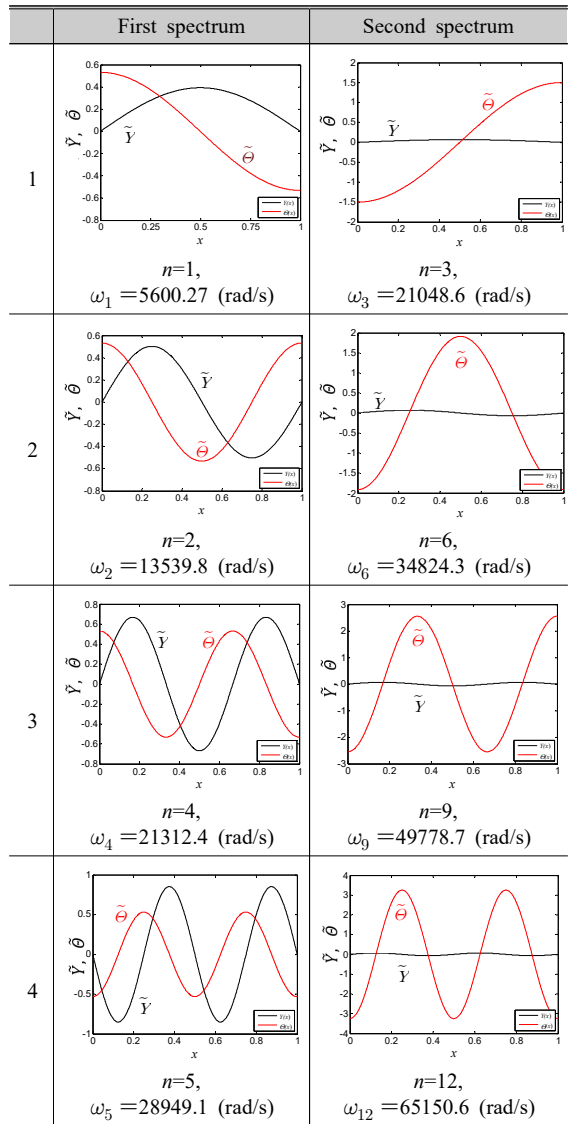
**Table 6** Comparison of the normalized natural modes between the first spectrum and the second spectrum of the hinged-hinged beam for  $s^{-1}=0.1097$



그러므로  $n=1, 2, 4, 5$ 의 고유진동수는 제1스펙트럼에 속하고,  $n=3, 6, 9, 12$ 의 고유진동수는 제2스펙트럼에 속한다.

위의 논의를 구체적으로 확인하기 위해 Table 4와 Table 5에서 제2스펙트럼이 존재하는 고유진동형들을 Table 6과 Table 7에 도시하였다. Table 6에서 보는 바와 같이 제1스펙트럼에 속하는 고유진동형과 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형의 쌍들의  $\tilde{Y}$ 는 각각

**Table 7** Comparison of the normalized natural modes between the first spectrum and the second spectrum of the hinged-hinged beam for  $s^{-1}=0.1828$





동일하나 제1스펙트럼의  $\tilde{\Theta}$ 와 제2스펙트럼의  $\tilde{\Theta}$ 의 위상이 반대이다. 이러한 현상은 Table 7에서도 마찬가지로 나타나고 있다.

**3.2 양단 고정보**

양단 고정보의 경우, 고유진동수 방정식으로부터  $s^{-1}$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 분포를 구하여 그 결과를 Fig. 4에 도시한다. Fig. 4에서 쌍곡선 형태의 곡선들 중 맨 아래 곡선(파란색 실선)은  $\omega_c$ 에 대응하는 곡선이다. 양단 고정보에서는 Han의 이론<sup>(6)</sup>에 Runge-Kutta method를 적용하여 4개의 무차원 파수만 구할 수 있었다. 그 이상의 무차원 파수는 계산이 정확하게 수렴하지 않아 무차원 고유진동수를 계산할 수 없어 도시하지 않았다.

Fig. 4로부터 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있다. 첫째, 두 방법으로 얻은 무차원 고유진동수의 분포가 정확히 일치한다.

둘째, 일부의 무차원 고유진동수 곡선을 제외하고 고유진동수 곡선들이 교차한다. 그러나 양단 단순보와는 달리, 동일한 무차원 고유진동수 곡선 상에 존재하는 고유진동형은  $s^{-1}$ 값에 따라 다를 수 있다 (Fig. 4 참조).

셋째,  $s^{-1}$ 에 따른 고유진동형의 분포순서가 바뀌는 것을 확인할 수 있는데, 예를 들면  $s^{-1}=0.0987$ 일 때의 변위 고유진동형( $\tilde{Y}$ )은 고유진동수가 증가함에 따라 “대칭-반대칭-대칭-반대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-반대칭-대칭”의 순서로 나타나고,  $s^{-1}$

=0.2193일 때의 변위 고유진동형에서는 “대칭-반대칭-반대칭-대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭-반대칭-대칭”의 순서로 나타난다. 즉, 고유진동수가 증가함에 따라 나타나는 고유진동형 형태(대칭 또는 반대칭)의 순서가 불규칙하다.

넷째, 저차 모드에서 나타났던 변위의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )이 고차모드에서 다시 나타난다. 양단 단순보의 경우,  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 모든 저차 고유진동수들에 대응하는 제2스펙트럼이 존재하였다. 그러나 양단 고정보의 경우에는  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 모든 고유진동수들에 대해서 제2스펙트럼이 존재하지 않을 수 있음을 알 수 있다. 이 점은 양단 단순보와 다르다. 이와 같은 특징을 살펴보기 위해  $s^{-1}=0.0987$  및  $s^{-1}=0.2193$ 일 때의 처음 12개의 고유진동수들을 제1스펙트럼과 제2스펙트럼으로 분류하여 Table 8과 Table 9에 정리하였다.

Table 8을 보면 임계진동수보다 작은 고유진동수들 ( $n=1, 2, 3$ )에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수들이 존재하지 않으며, Table 9에서는  $n=1$ 에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재하지 않음을 알 수 있다. 제1스펙트럼에 속하는 고유진동형과 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형의 특징을 확인하기 위해 Table 8의 고유진동수들 중에서 제2스펙트럼이 존재하는 고유진동수들에 대하여, 고유진동형의 쌍(제1스펙트럼 및 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형)들을 각각 Table 10에서 비교하여 도시하였다. Table 10에서 보는 바와 같이, 제1스펙트럼에 속하는  $\tilde{Y}$ 의 고유진동형은 제2스펙트럼에 속하는  $\tilde{Y}$ 의 고유진동형과 동일하다. 그러나 회전각의 고유진동형( $\tilde{\Theta}$ )은 매우 다르다.

**3.3 고정-단순보**

고정-단순보의 경우, Han<sup>(6)</sup>의 방법을 사용하여 구할 수 있는 고유진동수 곡선들을 Fig. 5에 실제로 표시하였으며, 점으로 표시한 것들은 2장의 고유진동수 방정식을 이용하여 찾은 무차원 고유진동수들이다. 그리고 쌍곡선 형태의 곡선들 중 맨 아래의 쌍곡선(파란색 실선)은 임계진동수에 대응하는 곡선이다.

Fig. 5로부터 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있다. 첫째, 두 방법으로 얻은 고유진동수 곡선들이 일치한다.

둘째, 고정-단순보에서는 계산한 구간 내에서는  $s^{-1}$ 의 변화에 따라 고유진동수 곡선들이 교차되지 않는다. 이를 Fig. 5만으로 판단하기 어려워, 곡선들이 서

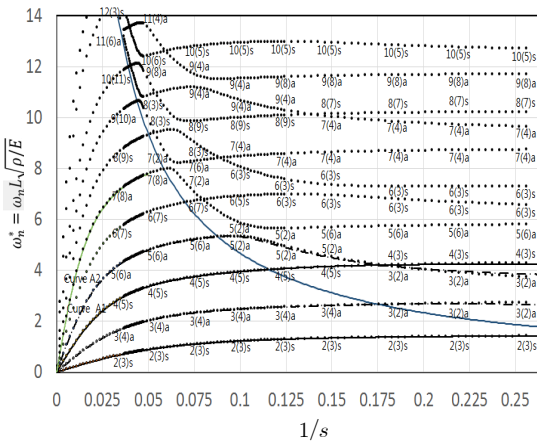


Fig. 4 The dimensionless natural frequency curves for the clamped-clamped beam

**Table 8** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the clamped-clamped beam for  $s^{-1}=0.0987$

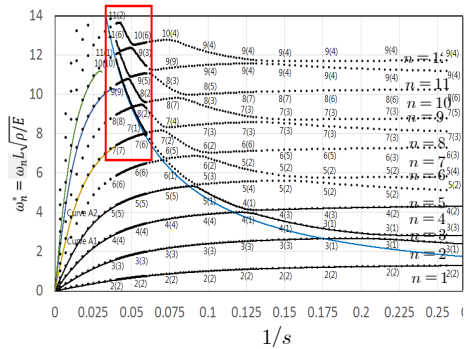
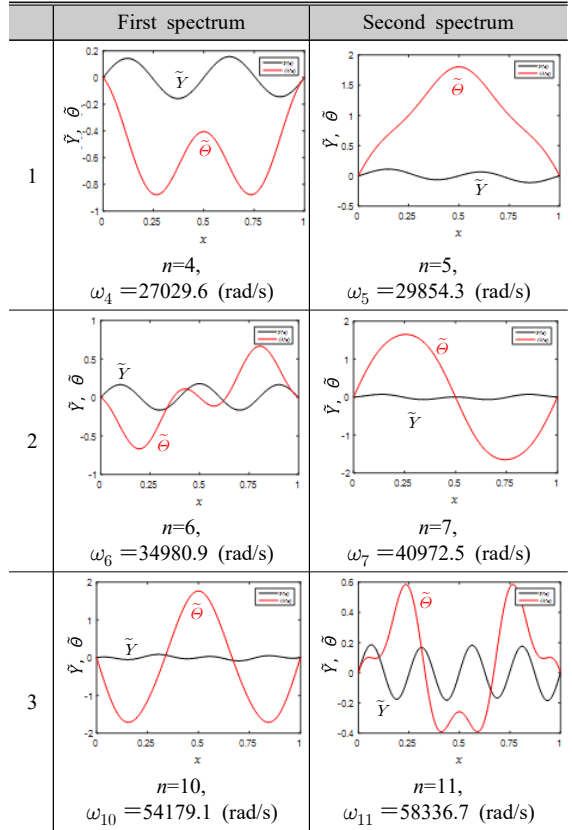
n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$	Frequency		Frequency	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$
1	2(3)s	6163.60			
2	3(4)a	12494.6			
3	4(5)s	19915.2			
			23947.9		
4	5(2)a	27029.6			
5				29854.3	5(2)a
6	6(5)s	34980.9			
7				40972.5	6(3)s
8	7(4)a	42843.9			
9	8(9)s	50578.4			
10	9(4)a	54179.1			
11				58336.7	9(4)a
12	10(5)s	65434.8			

**Table 9** Natural frequencies (rad/s) of the clamped-clamped beam for  $s^{-1}=0.2193$

n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$	$\omega_n$		$\omega_n$	Features of $\tilde{Y}$ and $\tilde{\Theta}$
1	2(3)s	7105.71			
2			10776.5		
3	3(2)a	13698.6			
				19789.9	3(2)a
4	4(3)s	21559.2			
5	5(6)a	29222.1			
6	6(3)s	33744.9			
7				36886.8	6(3)s
8	7(4)a	44114.6			
9				49185.3	7(4)a
10	8(7)s	51658.3			
11	9(8)a	59145.3			
12	10(5)s	64560.8			

로 교차하는지를 확인하기 위해,  $0.035 < s^{-1} < 0.06$ 의 짧은 상자영역을 확대해서 Fig. 6에 다시 도시하였다. 이를 통해 고정-단순보에서 계산한 구간 내에 교차하지 않음을 확인하였다. 고유진동수 곡선들이 교차하지 않으나, 동일한 무차원 고유진동수 곡선상에 존재하는 고유진동형은  $s^{-1}$ 의 값에 따라 다를 수 있음을 알

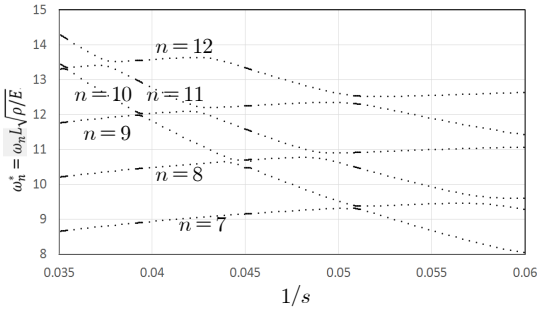
**Table 10** Comparison of the normalized natural modes between the first spectrum and the second spectrum of the clamped-clamped beam for  $s^{-1}=0.0987$



**Fig. 5** The dimensionless natural frequency curves for the clamped-hinged beam

수 있다(Fig. 5 참조).

셋째,  $s^{-1}$ 의 값이 변함에 따라 고유진동형의 분포순서가 바뀌는 것을 확인할 수 있는데, 예를 들면  $s^{-1}$



**Fig. 6** The detailed dimensionless natural frequency curves in the box in Fig. 5

=0.0987일 때의 고유진동형의 절점 수는 고유진동수가 증가함에 따라 2(2)-3(3)-4(4)-5(1)-5(3)-6(2)-6(2)-7(3)-8(3)-8(5)-9(4)-9(4)의 순서로 나타나고(여기서 앞의 숫자는  $\tilde{Y}$ 의 절점 수를 의미하고 뒤쪽의 괄호 안의 숫자는  $\tilde{\Theta}$ 의 절점수를 의미한다),  $s^{-1}=0.2193$ 일 때의 고유진동형의 절점 수는 2(2)-3(1)-3(1)-4(2)-5(2)-5(2)-6(3)-7(3)-7(3)-8(6)-9(4)-9(4)의 순서로 나타난다. 즉, 고유진동수가 증가함에 따라 나타나는 고유진동형 형태(대칭 또는 반대칭)의 순서가 불규칙하다.

넷째, 고정-단순보에서도  $\tilde{Y}$ 의 절점수가 같은 서로 다른 고유진동수가 존재한다. 그러나 고정-단순보의 경우에는  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 저차의 고유진동수들만을 살펴볼 때, 모든 고유진동수들에 대해서 제2스펙트럼이 존재하지 않을 수 있다. 이와 같은 점이 양단 단순보와 다르다. 이와 같은 특징을 보이기 위해  $s^{-1}=0.0987$  및  $s^{-1}=0.2193$ 일 때의 처음 12개의 고유진동수들을 제1스펙트럼과 제2스펙트럼으로 분류하여 Table 11과 Table 12에 정리하였다.

Table 11을 보면  $n=1, 2, 3$ 에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수들이 존재하지 않으며, Table 12에서는  $n=1$ 에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재하지 않음을 알 수 있다. 제1스펙트럼에 속하는 고유진동형과 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형의 특징을 확인하기 위해 Table 11의 고유진동수들 중에서 제2스펙트럼이 존재하는 고유진동수들에 대하여, 고유진동형의 쌍(제1스펙트럼 및 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형)들을 각각 Table 13에서 비교하였다. Table 13에서 보는 바와 같이 각 쌍들의 고유진동형을 살펴보면, 변위의 고유진동형( $\tilde{Y}$ )이 동일하나 회전 각의 고유진동형( $\tilde{\Theta}$ )은 매우 다르다.

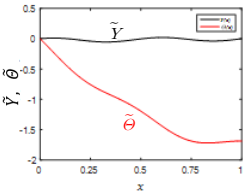
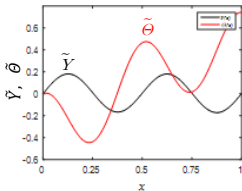
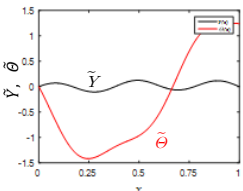
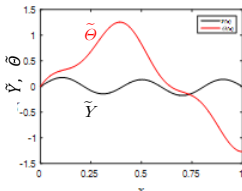
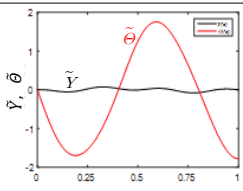
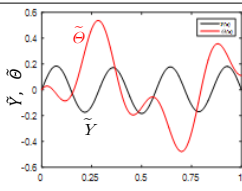
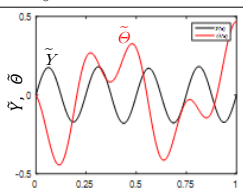
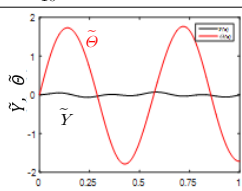
**Table 11** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the clamped-hinged beam for  $s^{-1}=0.0987$

n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Number of nodes in ( $\tilde{Y}, \tilde{\Theta}$ )	$\omega_n$		$\omega_n$	Number of nodes in ( $\tilde{Y}, \tilde{\Theta}$ )
1	2(2)	5078.72			
2	3(3)	12083.3			
3	4(4)	19680.5			
			23947.9		
4	5(1)	25426.5			
5				27474.9	5(3)
6	6(2)	34334.2			
7				35590.2	6(2)
8	7(3)	42841.4			
9	8(3)	47423.7			
10				50593.6	8(5)
11	9(4)	58052.7			
12				61545.6	9(4)

**Table 12** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the clamped-hinged beam for  $s^{-1}=0.2193$

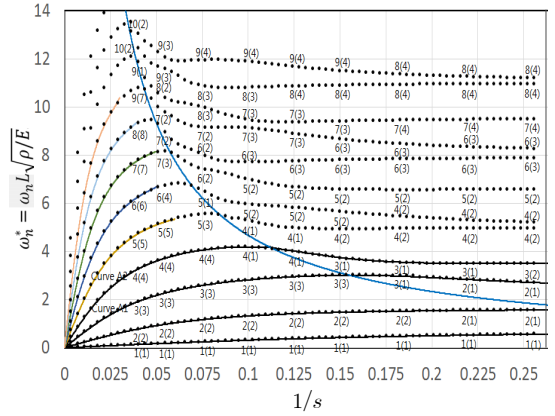
n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Number of nodes in ( $\tilde{Y}, \tilde{\Theta}$ )	$\omega_n$		$\omega_n$	Number of nodes in ( $\tilde{Y}, \tilde{\Theta}$ )
1	2(2)	6359.53			
2			10776.5		
3	3(1)	13259.7			
				14380.5	3(1)
4	4(2)	21557.6			
5	5(2)	26556.7			
6				29242.5	5(2)
7	6(3)	36678.3			
8	7(3)	41460.3			
9				44226.0	7(3)
10	8(6)	51657.7			
11	9(4)	56856.9			
12				59155.0	9(4)

**Table 13** Comparison of the normalized natural modes between the first spectrum and the second spectrum of the clamped-hinged beam for  $s^{-1} = 0.0987$

	First spectrum	Second spectrum
1	 <p><math>n=4,</math> <math>\omega_5 = 25426.5 \text{ (rad/s)}</math></p>	 <p><math>n=5,</math> <math>\omega_5 = 27474.9 \text{ (rad/s)}</math></p>
2	 <p><math>n=6,</math> <math>\omega_6 = 34334.2 \text{ (rad/s)}</math></p>	 <p><math>n=7,</math> <math>\omega_7 = 35590.2 \text{ (rad/s)}</math></p>
3	 <p><math>n=9,</math> <math>\omega_9 = 47423.7 \text{ (rad/s)}</math></p>	 <p><math>n=10,</math> <math>\omega_{10} = 50593.6 \text{ (rad/s)}</math></p>
4	 <p><math>n=11,</math> <math>\omega_{11} = 58052.7 \text{ (rad/s)}</math></p>	 <p><math>n=12,</math> <math>\omega_{12} = 61545.6 \text{ (rad/s)}</math></p>

**3.4 외팔보**

기하학적 데이터를 변화시켜 얻는 세장비의 역수 ( $s^{-1}$ )와 무차원 고유진동수( $\omega_n^*$ )의 관계를 Fig. 7에 도시하였다. 양단 단순보에서는 Han<sup>(6)</sup>의 방법으로 모든 무차원 고유진동수를 구할 수 있는 반면에 외팔보의 경우 그렇지 않아서 구할 수 있는 것만을 실선으로 표시하였다. 그리고 점으로 표시한 것들은 2장의 고유진동수 방정식을 이용하여 찾은 무차원 고유진동수들이다. 쌍곡선 형태의 곡선들 중 맨 아래의 쌍곡선



**Fig. 7** The dimensionless natural frequency curves for the clamped-free beam

은 임계진동수에 대응하는 곡선(파란색 실선)이다.

Fig. 7로부터 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있다. 첫째, 두 방법으로 얻은 고유진동수 곡선들이 일치한다.

둘째, 외팔보에서는 계산한 구간 내에서는 모든 고유진동수 곡선들이 상호 교차되지 않는다. 그러나 동일 곡선 상에 있는 고유진동수의 고유진동형 절점 수가 다른 것을 확인할 수 있다.

셋째,  $s^{-1}$ 의 값에 따라 고유진동형이 나타나는 순서의 변화가 정형적이지 않다. 예를 들면,  $s^{-1}=0.0987$  일 때의 고유진동형의 절점 수는 고유진동수가 증가함에 따라 1(1)-2(2)-3(3)-4(1)-4(1)-5(2)-6(3)-7(3)-7(3)-8(3)-9(4)의 순서로 나타나고,  $s^{-1}=0.2193$  일 때의 고유진동형의 절점 수는 1(1)-2(1)-2(1)-3(1)-4(2)-4(2)-5(2)-6(3)-6(3)-7(4)-8(4)-8(4)의 순서로 나타난다.

넷째, 외팔보에서도  $\tilde{Y}$ 의 절점수가 같은 서로 다른 고유진동수가 존재한다. 양단 단순보의 경우,  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 모든 고유진동수들에 대응하는 제2스펙트럼이 존재하였다. 그러나 외팔보의 경우에는  $\omega < \omega_c$ 의 영역에서 일부의 고유진동수들에 대해서만 제2스펙트럼이 존재한다. 이와 같은 점이 양단 단순보와 다르다. 이와 같은 특징을 보이기 위해  $s^{-1} = 0.0987$  및  $s^{-1} = 0.2193$  일 때의 처음 12개의 고유진동수들을 제1스펙트럼과 제2스펙트럼으로 분류하여 Table 14와 Table 15에 정리하였다.

Table 14를 보면 임계진동수보다 작은 고유진동수들 중, 1, 2, 3차 고유진동수( $n=1, 2, 3$ )에 대응되는 제

**Table 14** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the clamped-free beam for  $s^{-1}=0.0987$

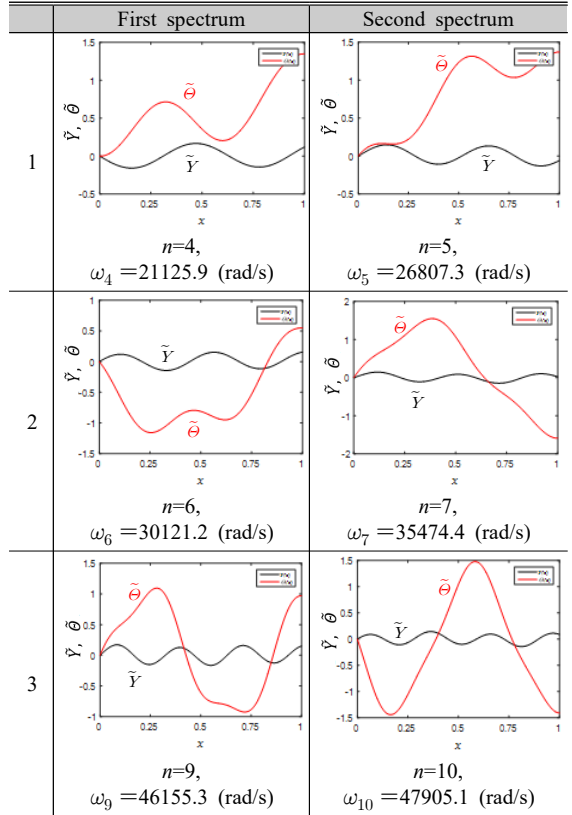
n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c$	Second spectrum	
	Number of nodes in $(\tilde{Y}, \tilde{\Theta})$	$\omega_n$		$\omega_n$	Number of nodes in $(\tilde{Y}, \tilde{\Theta})$
1	1(1)	1570.41			
2	2(2)	6642.87			
3	3(3)	14201.9			
	4(1)	21125.9			
4			23947.9		
5				26807.3	4(1)
6	5(2)	30121.2			
7				35474.4	5(2)
8	6(3)	38907.2			
9	7(3)	46155.3			
10				47905.1	7(3)
11	8(3)	54592.8			
12	9(4)	60114.9			

**Table 15** Natural frequencies  $\omega_n$ (rad/s) of the clamped-free beam for  $s^{-1}=0.2193$

n	First spectrum		Critical frequency, $\omega_c^*$	Second spectrum	
	Number of nodes in $(\tilde{Y}, \tilde{\Theta})$	$\omega_n$		$\omega_n$	Number of nodes in $(\tilde{Y}, \tilde{\Theta})$
1	1(1)	2643.47			
2	2(1)	7825.72			
			10776.5		
3				14351.2	2(1)
4	3(1)	17637.1			
5	4(2)	25088.6			
6				26777.9	4(2)
7	5(2)	33150.7			
8	6(3)	39703.4			
9				42150.3	6(3)
10	7(4)	47874.4			
11	8(4)	55345.0			
12				56892.2	8(4)

2스펙트럼의 고유진동수들이 존재하지 않으나 4번째 ( $n=4$ )에 대응하는 제2스펙트럼이 존재한다. Table 15에서는 임계진동수보다 작은 첫 번째 고유진동수 ( $n=1$ )에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재

**Table 16** Comparison of the normalized natural modes between the first spectrum and the second spectrum of the clamped-free beam for  $s^{-1}=0.0987$



하지 않으나, 임계진동수보다 작은 두 번째 고유진동수( $n=2$ )에 대응되는 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재함을 알 수 있다.

제1스펙트럼에 속하는 고유진동형과 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형의 특징을 확인하기 위해 Table 14의 고유진동수들 중에서 제2스펙트럼이 존재하는 고유진동수들에 대하여, 고유진동형의 쌍(제1스펙트럼 및 제2스펙트럼에 속하는 고유진동형)들을 각각 Table 16에서 비교하였다. Table 16에서 보는 바와 같이 각 쌍들의 고유진동형을 살펴보면, 변위 고유진동형( $\tilde{Y}$ ) 및 회전각 고유진동형( $\tilde{\Theta}$ )의 절점 수는 동일하나 고유진동형이 일치하지 아니한다.

**3.5 제2스펙트럼에 대한 추가적 논의**

3.1절의 양단 단순보에서 검토한 바와 같이 제1스펙트럼과 제2스펙트럼의 정규화된 고유진동형을 살

피보면(Table 6과 Table 7참조),  $\tilde{Y}$ 는 동일하나  $\tilde{\Theta}$ 는 위상이 반대였다. 그러므로 엄밀하게 말하면, 제1스펙트럼의 고유진동형( $\tilde{Y}$  및  $\tilde{\Theta}$ )과 제2스펙트럼의 고유진동형은 동일하지 않다. 그러나 3.1~3.4절에서는 논의의 일관성을 위해, 양단 단순보와 같은 방식으로 나머지 보들의 진동수 스펙트럼을 분류하여 논의를 진행하였다. 양단 고정보, 고정-단순보, 외팔보에서도 제1스펙트럼과 제2스펙트럼의 정규화된 고유진동형( $\tilde{\Theta}$ )는 매우 달랐다(Table 10, Table 13, Table 16 참조). 따라서 동일한 고유진동형  $\tilde{Y}$ 와  $\tilde{\Theta}$ 을 갖는 제2스펙트럼은 존재하지 않는다고 말할 수 있다.

#### 4. 결 론

이 연구는 네 가지의 Timoshenko 보(양단 단순보, 양단 고정보, 고정-단순보 및 외팔보)에 대한  $s^{-1}$ (세장비의 역수)값의 변화에 따른 고유진동수 곡선들을 작성하였다. 이를 위해, Han의 방법(무차원 파수를 구하여 고유진동수 곡선을 작성하는 방법)으로는 고차 모드의 고유진동수 곡선을 그리는데 한계가 있어, 고유진동수 방정식으로부터 고유진동수를 구하여 첫 번째 고유진동수에서부터 12번째 고유진동수까지의 고유진동수 곡선을 작성하였다. 이 연구에서 수행한 1~12번째 고유진동수 곡선과 고유진동수 및 정규화된 고유진동형을 비교, 고찰하여 다음과 같은 현상을 확인하였다.

- $s^{-1}$ 의 변화에 따른 고유진동수 곡선의 특징은 경계조건에 따라 상이하다. 양단 단순보와 양단 고정보의 경우,  $s^{-1}$ 값의 변화에 따른 고유진동수 곡선들이 모두 또는 일부 교차한다. 고정-단순보와 외팔보의 경우, 계산 범위 내에서는 곡선들은 교차되지 않았다.
- 일반적으로 고유진동수가 증가함에 따라 고유진동형의 형태(대칭 또는 비대칭, 절점 수)가 나타나는 순서는 불규칙하고 정형적이지 않다.
- 양단 단순보의 경우, 고유진동수 곡선들에서 동일한 곡선상에 존재하는 고유진동수들의 변위의 고유진동형은 모두 동일하지만, 양단 고정보, 고정-단순보, 외팔보의 경우 동일 곡선상에 존재하는 진동수일지라도  $s^{-1}$ 의 값에 따라 고유진동형의 형태가 바뀐다.
- 양단 단순보의 경우에  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하면서 변위의 고유진동형이 동일한 모든 고유진동수들에 대응하는 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재한다. 그리

나 양단 고정보와 고정-단순보의 경우에는  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 모든 고유진동수들에 대한 제2스펙트럼이 존재하지 않을 수 있다. 외팔보의 경우에는 양단 단순보와는 달리,  $\omega < \omega_c$ 의 영역에 속하는 일부의 고유진동수들에 대해서 변위의 고유진동형이 동일한 제2스펙트럼의 고유진동수가 존재한다.

- 변위 및 회전각의 고유진동형이 모두 동일한 제2스펙트럼은 존재하지 않는다.

#### 후 기

이 연구는 순천대학교 교연비 사업에 의하여 연구되었음.

#### References

- (1) Traill-Nash, R. W. and Collar, A. R., 1953, The Effects of Shear Flexibility and Rotatory Inertia on the Bending Vibrations of Beams, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 6, pp. 186~213.
- (2) Anderson, G. R., 1953, Flexural Vibration of Uniform Beams according to the Timoshenko Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 504~510.
- (3) Dolph, C. L., 1954, On the Timoshenko Theory of Transverse Beam Vibrations, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 12, pp. 175~187.
- (4) Abbas, B. A. H. and Thomas, J., 1977, The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp. 123~137.
- (5) Bhashyam, G. R. and Prathap, G., 1981, The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 76, pp. 407~420.
- (6) Han, S. M., Bernaroya, H. and Wei, T., 1994, Dynamics of Transversely Vibrating Beams using Four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, pp. 935~988.
- (7) Levinson, M. and Cooke, D. W., 1982, On the Two Frequency Spectra of Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, pp. 319~326.
- (8) Stephen, N. G., 2006, The Second Spectrum of Timoshenko Beam Theory-further Assessment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, pp. 372~389.
- (9) Vasconcelos, A. C. A., Azevedo, A. S. C. and

Hoefel, S. S., 2016, The Second Spectrum of Timoshenko Beam, Congresso Nacional de Engenharia Mecânica Agosto de 2016 Fortaleza-Ceará, pp. 21~25.

(10) Majkut, L., 2009, Free and Forced Vibrations of Timoshenko Beams Described by Single Difference Equation, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 1, pp. 193~210.

(11) van Rensburg, N. F. G. and der Merwe, A. J., 2006, Natural Frequencies and Modes of a Timoshenko Beam, Wave Motions, Vol. 44, pp. 58~69.

(12) Lee, S. Y. and Lin, S. M., 1998, Non-uniform Timoshenko Beams with Time-dependent Elastic Boundary Conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 217, pp. 223~238.

(13) Hutchinson, J. R., 2001, Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 68, pp. 87~92.



**Min Ho Seo** received the M.S. in the Dept. of Mechanical engineering from Suncheon National University, Suncheon, Korea in 2018. He is currently a mechanical engineer in the nuclear power industry at the Kepco-enc. His research interests are in the area of mechanical dynamics and seismic design.



**Yong-Woo Kim** is currently a professor in the school of Mechanical and Aerospace Engineering at Suncheon National University. Recently, he is interested in the area of mechanical vibration, dynamics of structure and finite element analysis.