

폭이 테이퍼진 레일레이 외팔보의 진동 해석

Vibration Analysis of Width-tapered Cantilevered Rayleigh Beams

박민규* · 이정우†
Min Gyu Park* and Jung Woo Lee†

(Received September 27, 2022 ; Revised October 25, 2022 ; Accepted October 25, 2022)

Key Words : Tapered Beam(테이퍼진 보), Rayleigh Beam(레일레이 보), Rotary Inertia(회전관성), Frobenius Method(프로베니우스 법), Transfer Matrix Method(전달행렬법)

ABSTRACT

The vibration characteristics of width-tapered Rayleigh beams with the clamped-free boundary condition is investigated, and subsequently used to analyze the effect of rotary inertia and taper ratio on the natural frequencies and mode shapes of the beams. The width of the cross-section is assumed to linearly reduce along the length of the beam. The frequency determinant is obtained by using the transfer matrix, and the differential equation is solved using the power series. The accuracy of the method is demonstrated by comparing the results obtained in this study with those obtained in the previous study. In addition, the effect of rotary inertia and taper ratio on the eigen-pairs of width-tapered Rayleigh beams with respect to the variation of the total length is investigated.

1. 서론

길이에 따라 선형적으로 단면이 변하는 보의 동특성에 관한 연구는 기계, 건축, 토목 등 다양한 분야에서 폭넓게 연구되고 있다⁽¹⁻⁹⁾. 대부분의 연구들은 상수 테이퍼 비를 가지고 선형적으로 높이와 폭이 동시에 변하는⁽¹⁾, 높이가 변화하는 테이퍼진 보⁽²⁾에 대한 회전관성과 전단변형 및 테이퍼 비의 영향을 분석했다. 일부 연구에서 폭이 테이퍼진 보에 대한 연구가 수행되었다⁽³⁾.

테이퍼진 보의 미분 방정식은 멱급수의 해법을 통하여 결정되었고, Banerjee⁽¹⁾는 동강성법을 통하여 레일레이 보의 주파수 방정식을 유도 했다. Tang 등⁽⁴⁾은 적분 방정식법을 사용하여 단면의 높이가 테이퍼진 레일레이

보의 진동특성을 조사했고, Li 등⁽⁵⁾은 균일한 단면을 가지는 레일레이 보의 1차 고유진동수를 결정하기 위한 근사 공식을 연구했다. Chen 등⁽⁶⁾은 테이퍼진 레일레이 보의 진동 특성 조사를 위해 변화 반복법을 사용하였다.

폭이 테이퍼진 레일레이 보나 티모셴코 보에 대한 연구는 선행연구들에서 찾아보기 어렵다. 전달행렬법은 요소의 수에 관계없이 행렬의 크기(현재의 연구는 4×4)가 동일하다. 요소의 수에 의존하여 변화하는 유한요소 기반의 연구들에 비하여 상태량의 전달과정에서 변화되는 상태량을 곱해주면 되므로 응용연구가 용이하고 방법론의 단순함이 가장 큰 장점이다.

폭이 테이퍼진 보에 대한 연구는 Lee 등⁽⁷⁾에 의해 전달행렬법을 사용하여 분석되었으나 오일러-베르누이 보에 대한 연구로 회전관성의 영향이 고려되지 않았다. 또한, 현재의 방법과 같이 하나의 요소로 요구

† Corresponding Author; Member, Department of Mechanical Engineering, Kyonggi University, Professor
E-mail : j.w.lee@kyonggi.ac.kr

* Member, Department of Mechanical Engineering, Kyonggi University, Student

‡ Recommended by Editor Seong Yong Wie
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

되는 수의 고유진동수를 계산할 수 있는 폭이 테이퍼진 레일레이 보에 대한 전달행렬법은 연구되지 않았다. 따라서 이 연구에서는 회전관성의 영향이 고려된 고정-자유 경계조건을 가지는 폭이 테이퍼진 레일레이 보의 고유진동특성을 분석하였고 고유진동수 계산을 위해 주파수 방정식은 전달행렬을 이용해 유도하였다. 미분방정식의 해는 멱급수 중 Frobenius 법을 사용하여 계산하였다.

개발된 방법의 정확도는 선행연구에서 얻어진 고유진동수와 비교하여 논증하였다. 길이의 변화에 대한 고유진동수와 모드형상에 관한 회전관성의 영향이 조사되었으며 테이퍼 비의 영향이 검토되었다. 오일러-베르누이 이론으로 계산된 결과들과의 비교하여 5 차까지 고유진동수 및 모드형상에 대한 회전관성의 영향을 분석하였다.

2. 이 론

2.1 미분 방정식

Fig. 1은 선형적으로 폭이 감소하는 테이퍼진 보의 형상이다. XYZ는 전체 좌표계이고, b_0 와 h_0 는 테이퍼지지 않은 단면의 폭과 높이이다. L 은 보 요소의 전체 길이이고, $c=(b_0-b(x))/b_0$ 는 테이퍼 비이다. 또한, 이 연구에서는 전단변형의 영향을 무시하였고, 회전관성의 영향을 고려하였다.

폭이 테이퍼진 레일레이 보의 고유진동수와 모드형상을 분석하기 위하여 다음의 변형에너지(U)와 운동에너지(T)를 고려하였다⁽¹⁾.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \{m(x)\dot{w}^2 + \rho I(x)\dot{\theta}^2\} dx \tag{1}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)(w'')^2 dx \tag{2}$$

여기서, $EI(x)$, $m(x)$ 와 $\rho I(x)$ 는 테이퍼 비에 따라 선형적으로 변화하는 굽힘 강성과 단위 길이 당 질량, 회전관성을 나타낸 것으로 다음과 같다.

$$EI(x) = EI_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right) \tag{3}$$

$$m(x) = m_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right) \tag{4}$$

$$\rho I(x) = \rho I_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right) \tag{5}$$

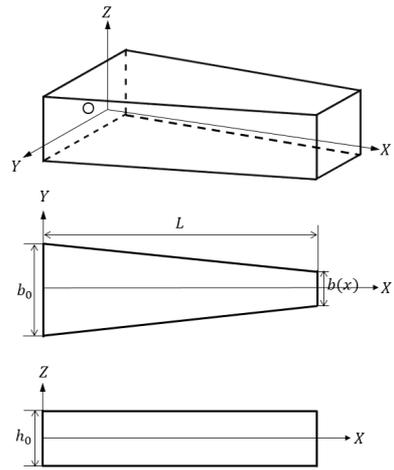


Fig. 1 Geometry of width-tapered beam

여기서, EI_0 , m_0 와 ρI_0 는 테이퍼 비 $c=0$ 일 때 굽힘 강성과 단위 길이 당 질량관성, 회전관성 값을 나타낸다. 해밀턴 원리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \tag{6}$$

식 (6)에 식 (1)과 (2)를 대입하면 지배 미분방정식 (식 (7))과 굽힘 모멘트(식 (8)), 전단력(식 (9))을 유도할 수 있다.

$$(EI(x)w'')'' - (\rho I(x)\ddot{w}') + m(x)\ddot{w} = 0 \tag{7}$$

$$M = -EI(x)w'' \tag{8}$$

$$V = (EI(x)w'')' - \rho I(x)w''' \tag{9}$$

식 (7)은 w 가 동일한 각주파수(ω)를 가지고 조화 진동 하는 것으로 가정하면 변수분리법의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(x,t) = W(x)\cos\omega t \tag{10}$$

식 (10)을 식 (7)에 대입한 뒤 변수분리 한 무차원 미분방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(1-\zeta)W'''' - 2W'''' + \alpha^2(1-\zeta)W'' - \alpha^2W' - \beta^2(1-\zeta)W = 0 \tag{11}$$

여기서 $\alpha^2 = \rho I_0 L^2 \omega^2 / EI_0 c^2$, $\beta^2 = m_0 L^4 \omega^2 / EI_0 c^4$ 와 $\zeta = cx/L$ 이다.

2.2 미분방정식의 해

식 (11)의 해는 멱급수 중 하나인 Frobenius 법을 사용하여 구할 수 있다. 그 일반해는 다음과 같으며 이때 a_{i+1} 은 Frobenius 계수이다.

$$W(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{12}$$

식 (11)에 식 (12)를 대입하고 가장 저차항에 대한 계수 값을 사용하여 결정방정식을 유도할 수 있다.

$$k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0 \tag{13}$$

점화관계식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{i+5} &= \frac{k+i+2}{(k+i+4)} a_{i+4} - \frac{\alpha^2}{(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+3} \\ &+ \frac{\alpha^2(k+i+1)}{(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+2} \\ &+ \frac{\beta^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+1} \\ &- \frac{\beta^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_i \end{aligned} \tag{14}$$

식 (13)과 식 (14)로부터 Frobenius 계수 $a_1 - a_5$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$a_1 = 1 \tag{15}$$

$$a_2 = \frac{k-1}{k+1} a_1 \tag{16}$$

$$a_3 = \frac{k}{k+2} a_2 - \frac{\alpha^2}{(k+2)(k+1)} a_1 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{k+1}{k+3} a_3 - \frac{\alpha^2}{(k+3)(k+2)} a_2 \\ &+ \frac{\alpha^2 k}{(k+3)(k+2)(k+1)} a_1 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{k+2}{k+4} a_4 - \frac{\alpha^2}{(k+4)(k+3)} a_3 \\ &+ \frac{\alpha^2(k+1)}{(k+4)(k+3)(k+2)} a_2 \\ &+ \frac{\beta^2}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} a_1 \end{aligned} \tag{19}$$

2.3 전달행렬

식 (13)으로 부터 구한 $k=0, 1, 2, 3$ 의 4개의 값으로부터 식 (11)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(\zeta, k) = A_1 f(\zeta, 0) + A_2 f(\zeta, 1) + A_3 f(\zeta, 2) + A_4 f(\zeta, 3) \tag{20}$$

여기서, 4개의 k 값에 대한 함수 $f(\zeta, k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(\zeta, 0) &= a_1(0)\zeta^0 + a_2(0)\zeta^1 + a_3(0)\zeta^2 + a_4(0)\zeta^3 + \dots \\ f(\zeta, 1) &= a_1(1)\zeta^1 + a_2(1)\zeta^2 + a_3(1)\zeta^3 + a_4(1)\zeta^4 + \dots \\ f(\zeta, 2) &= a_1(2)\zeta^2 + a_2(2)\zeta^3 + a_3(2)\zeta^4 + a_4(2)\zeta^5 + \dots \\ f(\zeta, 3) &= a_1(3)\zeta^3 + a_2(3)\zeta^4 + a_3(3)\zeta^5 + a_4(3)\zeta^6 + \dots \end{aligned} \tag{21}$$

식 (20)을 ζ 에 대해 미분하여 기울기(Φ)를 결정한다.

$$\Phi = \frac{c}{L} \left\{ A_1 f'(\zeta, 0) + A_2 f'(\zeta, 1) + A_3 f'(\zeta, 2) + A_4 f'(\zeta, 3) \right\} \tag{22}$$

식 (8)과 식 (9)에 식 (10)과 식 (21)을 대입하면 굽힘 모멘트와 전단력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M = -N_1(1-\zeta)f''(\zeta, j-1)A_j \tag{23}$$

$$V = N_2[(1-\zeta)f'''(\zeta, j-1) - f''(\zeta, j-1) + \alpha^2(1-\zeta)f'(\zeta, j-1)]A_j \tag{24}$$

여기서, $N_1 = EI_0 c^2 / L^2$, $N_2 = EI_0 c^3 / L^3$ 이다.

식 (20), (22) ~ (24)에 $x=0$ 과 $x=L$ 을 대입하여 행렬형태로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{x=L} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{26}$$

행렬 식 (25)와 (26)을 단순화하면 다음과 같이 표현되며,

$$Z_{x=0} = P_{ij} A_j \tag{27}$$

$$Z_{x=L} = Q_{ij} A_j \tag{28}$$

여기서, $Z_{x=0}$ 와 $Z_{x=L}$ 는 각각 $x=0$ 과 $x=L$ 일 때의 상태량이며 식 (27)로부터 상수 A_j 는 식 (29)와 같이 얻을 수 있다.

$$A_j = P_{ij}^{-1} Z_i \tag{29}$$

식 (29)를 식 (28)에 대입함으로써 폭이 테이퍼진 레일레이 보의 전달행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$Z_{x=L} = T_{ij}Z_{x=0} \tag{30}$$

여기서, T_{ij} 를 전달행렬이라 하고 $T_{ij} = Q_{ij}P_{ij}^{-1}$ 이다. 식 (30)을 사용하여 고유진동수와 모드형상을 확인할 수 있고 전달행렬의 일반적인 절차에 따라 주파수 방정식을 결정할 수 있다. 고정-자유조건 경우 고정단에서는 $W=0, \Phi=0$ 이고, 자유단에는 $M=0, V=0$ 이다.

3. 결과 및 고찰

제안된 방법의 검증은 위하여 Table 1에서 주어진 물성치들이 고려되었고⁽⁷⁾, 검토된 결과는 Table 2에 나타내었다. 비교 결과를 통하여 제안된 방법의 정확도가 검증되었다. 비교 결과는 $c=0$ 일 때 계산된 고유진동수이고, 보 요소의 길이가 0.1 m, 0.5 m, 1.0 m 때 3차 고유진동수까지 비교하였다.

예측된 결과들을 계산하기 위하여 사용된 맥급수 항의 수는 60개이다. Table 2의 결과들은 계산된 고유진동수를 다음의 식을 사용하여 무차원화 하였다.

$$\bar{\omega}_i = \omega_i / \sqrt{EI_0/m_0L^4} \tag{31}$$

Table 2에서 Diff.(%)는 제안된 방법의 식 (11)에서 테이퍼 비가 정확하게 0이 입력되지 않는데 계산을 위해 테이퍼 비 $c=0.001$ 을 사용하였기 때문에 발생한 값이다.

이를 기초하여, 고정-자유 경계조건을 가지는 폭이 테이퍼진 레일레이 보에 대한 회전관성과 테이퍼 비의 영향을 분석하기 위하여 변수연구가 수행되었다. 보의 길이는 0.1 m부터 1.0 m까지 0.1 m간격에서 조사되었고, 테이퍼 비는 0부터 0.5까지 0.1의 간격에서 고유진동수가 계산되었다.

계산된 결과들은 Table 3과 Table 4에 나타내었으며 Table 3은 오일러-베르누이 이론 (제안된 방법에서 $\alpha^2=0$)을 사용하여 계산된 결과이며 Table 4는 레일레이 보 이론을 이용하여 계산된 결과이다. Table 3과 4에서 분석된 결과들을 토대로 고유진동수와 모드 형상에 대한 회전관성과 테이퍼 비의 영향을 분석하였다. 분석된 결과들은 Figs. 2~4에 나타난다.

Fig. 2는 길이의 변화에 따른 회전관성의 영향을 분석한 것으로 5차까지의 고유진동수가 검토되었고, 테

Table 1 Material properties of the beam element

Notation	Description	Value
E	Elastic modulus	200 GPa
ρ	Density of beam material	7850 kg/m ³
c	Taper ratio	0~0.5
L	Length of beam	0.1~1 m
b_0	Width of cross-section	0.03 m
h_0	Height of cross-section	0.01 m

Table 2 First three natural frequencies of Rayleigh tapered beams with the cantilever end condition when $c=0$

L	$\bar{\omega}_i$	Non-dimensional natural frequency		
		Present	Ref. [9]	Diff. (%)
0.1 m	1	3.5103	3.5092	-0.0313
	2	21.745	21.743	-0.0092
	3	59.803	59.802	-0.0017
0.5 m	1	3.5168	3.5158	-0.0284
	2	22.025	22.023	-0.0091
	3	61.620	61.618	-0.0032
1.0 m	1	3.5170	3.5160	-0.0284
	2	22.034	22.032	-0.0091
	3	61.679	61.678	-0.0016

이퍼 비는 $c=0$ 에서 $c=0.5$ 까지 비교 하였다. 여기서, 회전관성의 영향을 검토하기 위하여 레일레이 보 이론을 사용하여 계산된 고유진동수($\omega_{i,R}$)를 오일러-베르누이 이론을 사용하여 계산된 고유진동수($\omega_{i,E}$)로 나누어 주파수 비로 나타내었다. 결과와 같이 길이변화에 따른 회전관성의 영향은 검토된 각각의 고유진동수에 대하여 $c=0$ 일 때와 $c=0.1 \sim 0.5$ 일 때의 영향이 유사하였다. 길이의 변화에 대한 하나의 예로 $c=0.5$ 일 때 5차 고유진동수는 $L=0.1$ m에서 약 8.3 %, $L=0.5$ m에서 0.38 %, $L=1$ m에서 0.095 %로 보의 길이가 짧아질수록 고유진동수에 대한 회전관성의 영향은 증가하였다.

Fig. 3은 레일레이 보에서 $c=0.1 \sim 0.5$ 의 고유진동수를 $c=0$ 의 고유진동수로 나누어 주파수 비로 나타내어 테이퍼 비의 영향을 분석하였다. Fig. 3에 나타난 것과 같이 테이퍼 비의 영향에 의해 모든 고유진

Table 3 First five natural frequency of width-tapered Euler-bernoulli beams with the cantilever boundary condition

c	$\omega_{i,E}$	Natural frequency [Hz]									
		$L = 0.1$	$L = 0.2$	$L = 0.3$	$L = 0.4$	$L = 0.5$	$L = 0.6$	$L = 0.7$	$L = 0.8$	$L = 0.9$	$L = 1$
0	1	815.63	203.91	90.626	50.977	32.625	22.656	16.646	12.744	10.070	8.1563
	2	5110.4	1277.6	567.82	319.40	204.42	141.96	104.29	79.850	63.091	51.104
	3	14308	3577.1	1589.8	894.27	572.33	397.45	292.01	223.57	176.65	143.08
	4	28038	7009.5	3115.4	1752.4	1121.5	778.84	572.21	438.10	346.15	280.38
	5	46349	11587	5149.9	2896.8	1854.0	1287.5	945.89	724.20	572.21	463.49
0.1	1	842.05	210.51	93.561	52.628	33.682	23.390	17.185	13.157	10.396	8.4205
	2	5160.8	1290.2	573.42	322.55	206.43	143.36	105.32	80.638	63.714	51.608
	3	14357	3589.3	1595.2	897.32	574.29	398.81	293.00	224.33	177.25	143.57
	4	28087	7021.8	3120.8	1755.4	1123.5	780.20	573.21	438.86	346.76	280.87
	5	46398	11599	5155.3	2899.9	1855.9	1288.8	946.89	724.97	572.81	463.98
0.2	1	872.62	218.16	96.958	54.539	34.905	24.240	17.809	13.635	10.773	8.7262
	2	5218.3	1304.6	579.81	326.14	208.73	144.95	106.50	81.536	64.423	52.183
	3	14413	3603.4	1601.5	900.84	576.54	400.37	294.15	225.21	177.94	144.13
	4	28144	7036.0	3127.1	1759.0	1125.8	781.78	574.37	439.75	347.46	281.44
	5	46455	11614	5161.6	2903.4	1858.2	1290.4	948.06	725.86	573.52	464.55
0.3	1	908.15	227.04	100.91	56.759	36.326	25.226	18.534	14.190	11.212	9.0815
	2	5284.2	1321.0	587.13	330.26	211.37	146.78	107.84	82.565	65.237	52.842
	3	14479	3619.8	1608.8	904.95	579.17	402.20	295.49	226.24	178.76	144.79
	4	28211	7052.7	3134.5	1763.2	1128.4	783.63	575.73	440.79	348.28	282.11
	5	46522	11631	5169.1	2907.6	1860.9	1292.3	949.43	726.91	574.35	465.22
0.4	1	950.11	237.53	105.57	59.382	38.004	26.392	19.390	14.845	11.730	9.5011
	2	5361.3	1340.3	595.70	335.08	214.45	148.93	109.41	83.771	66.189	53.613
	3	14558	3639.5	1617.6	909.88	582.32	404.39	297.10	227.47	179.73	145.58
	4	28292	7072.9	3143.5	1768.2	1131.7	785.88	577.38	442.06	349.28	282.92
	5	46604	11651	5178.2	2912.8	1864.2	1294.6	951.11	728.19	575.36	466.04
0.5	1	1000.7	250.18	111.19	62.544	40.028	27.797	20.423	15.636	12.354	10.007
	2	5454.2	1363.6	606.03	340.89	218.17	151.51	111.31	85.222	67.336	54.542
	3	14656	3664.0	1628.5	916.01	586.25	407.12	299.11	229.00	180.94	146.56
	4	28394	7098.5	3154.9	1774.6	1135.8	788.72	579.47	443.65	350.54	283.94
	5	46709	11677	5189.9	2919.3	1868.4	1297.5	953.24	729.83	576.65	467.09

Table 4 First five natural frequency of width-tapered Rayleigh beams with the cantilever boundary condition

c	$\omega_{i,R}$	Natural frequency [Hz]									
		L = 0.1	L = 0.2	L = 0.3	L = 0.4	L = 0.5	L = 0.6	L = 0.7	L = 0.8	L = 0.9	L = 1
0	1	814.06	203.81	90.606	50.971	32.623	22.655	16.645	12.744	10.069	8.1562
	2	5042.7	1273.3	566.97	319.13	204.31	141.90	104.26	79.833	63.081	51.097
	3	13869	3548.6	1584.2	892.48	571.60	397.10	291.82	223.46	176.58	143.04
	4	26505	6907.5	3094.9	1745.9	1118.9	777.55	571.51	437.69	345.90	280.22
	5	42489	11321	5096.3	2879.7	1846.9	1284.1	944.07	723.13	571.54	463.05
0.1	1	840.39	210.41	93.541	52.622	33.679	23.389	17.184	13.157	10.395	8.4204
	2	5092.5	1285.9	572.57	322.28	206.32	143.30	105.29	80.621	63.703	51.601
	3	13916	3560.7	1589.6	895.52	573.55	398.45	292.81	224.22	177.18	143.53
	4	26551	6919.5	3100.4	1749.0	1120.8	778.91	572.51	438.45	346.50	280.70
	5	42534	11333	5101.7	2882.8	1848.9	1285.4	945.06	723.89	572.14	463.54
0.2	1	870.86	218.05	96.936	54.532	34.902	24.238	17.808	13.634	10.773	8.7261
	2	5149.3	1300.2	578.94	325.87	208.62	144.90	106.47	81.518	64.412	52.176
	3	13971	3574.7	1595.8	899.03	575.80	400.02	293.96	225.10	177.87	144.09
	4	26605	6933.5	3106.6	1752.5	1123.1	780.49	573.67	439.34	347.20	281.27
	5	42586	11347	5108.0	2886.3	1851.2	1287.0	946.22	724.78	572.84	464.11
0.3	1	906.26	226.92	100.88	56.752	36.323	25.225	18.533	14.189	11.211	9.0813
	2	5214.4	1316.6	586.25	329.98	211.25	146.73	107.81	82.548	65.226	52.835
	3	14034	3591.0	1603.1	903.14	578.42	401.84	295.30	226.12	178.68	144.75
	4	26668	6950.0	3114.0	1756.6	1125.8	782.34	575.03	440.38	348.02	281.94
	5	42647	11364	5115.4	2890.5	1853.9	1288.9	947.59	725.83	573.67	464.78
0.4	1	948.06	237.40	105.54	59.374	38.001	26.390	19.389	14.845	11.729	9.5009
	2	5290.7	1335.9	594.82	334.80	214.34	148.87	109.38	83.753	66.178	53.606
	3	14111	3610.6	1611.8	908.06	581.58	404.03	296.91	227.36	179.66	145.53
	4	26744	6970.0	3122.9	1761.7	1129.0	784.58	576.68	441.65	349.02	282.75
	5	42723	11384	5124.4	2895.6	1857.1	1291.2	949.27	727.11	574.69	465.60
0.5	1	998.47	250.04	111.16	62.536	40.025	27.796	20.422	15.636	12.354	10.007
	2	5382.4	1359.0	605.12	340.60	218.05	151.45	111.28	85.204	67.325	54.535
	3	14206	3634.9	1622.7	914.17	585.49	406.75	298.91	228.89	180.87	146.51
	4	26841	6995.2	3134.2	1768.1	1133.1	787.42	578.76	443.24	350.28	283.77
	5	42819	11409	5135.9	2902.1	1861.3	1294.1	951.40	728.74	575.98	466.64

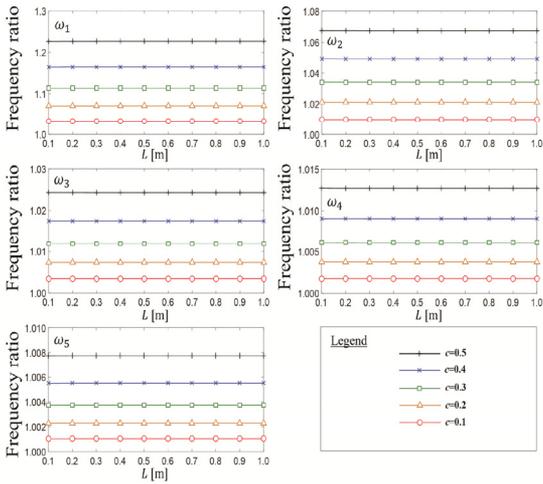


Fig. 2 Effect of the taper ratios on the natural frequencies of the cantilevered Rayleigh beam with respect to the variation in the length

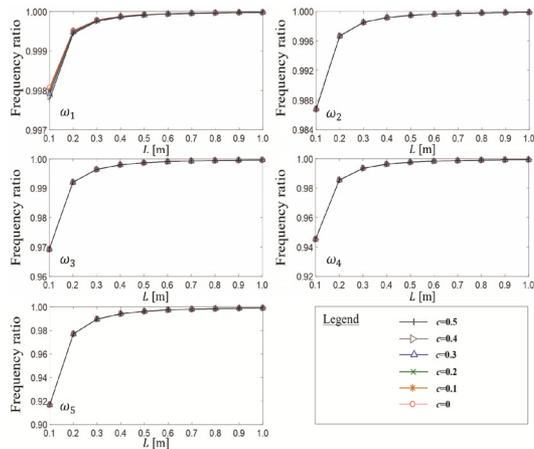


Fig. 3 Effect of the rotary inertia on the natural frequencies of the cantilevered Rayleigh beam with respect to the variation in the length

동수는 증가하였다. $c = 0$ 과 비교하여 1차 고유진동수는 $c = 0.1$ 일 때 3.2%, $c = 0.2$ 일 때 7%, $c = 0.3$ 일 때 11.3%, $c = 0.4$ 일 때 16.4%, $c = 0.5$ 일 때 23% 증가하였다. 이 결과는 테이퍼 비가 클수록 고유진동수는 증가하는 것을 나타낸다. 또한, $c = 0.5$ 일 때 $L = 0.1$ m에서 1차고유진동수는 약 22.65%, $L = 0.5$ m에서 22.69%, $L = 1$ m에서 22.69%로 길이의 변화에 대한 테이퍼 비의 영향은 비슷하게 나타났다.

Fig. 4는 5차까지의 모드형상을 나타내었다. 오일러-

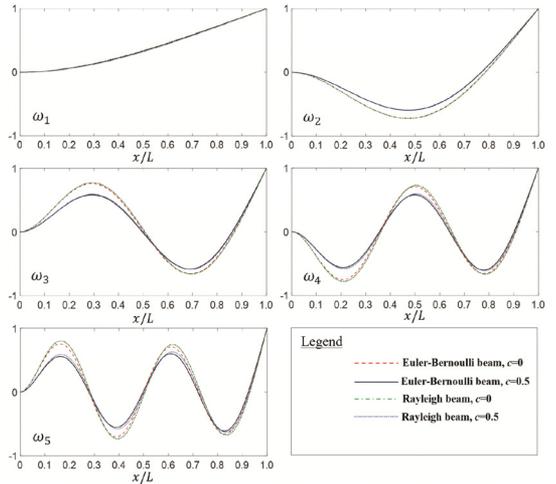


Fig. 4 Effect of the rotary inertia and taper ratios on the natural frequencies of the cantilevered Rayleigh beam when $L = 0.1$ m

베르누이 이론과 레일레이 이론을 사용하여 계산된 결과를 함께 나타내었다. 고려된 테이퍼 비는 $c = 0$ 과 $c = 0.5$ 이다. 레일레이 보와 오일러 보를 비교하였을 때 5차 고유진동수에서 회전관성의 영향이 가장 두드러지는 것으로 나타났고, $c = 0$ 과 $c = 0.5$ 일 때의 모드형상에서 차수가 증가할수록 테이퍼 비의 영향이 증가하였다.

4. 결 론

폭이 테이퍼진 레일레이 보의 고유진동수와 모드형상을 분석할 수 있는 수치적 방법을 전달행렬법을 사용하여 개발하였다. 개발된 방법론을 사용하여 레일레이보에서의 회전관성의 영향과 테이퍼 비의 영향을 분석하였다.

폭이 테이퍼진 레일레이 보의 길이 변화에 따라 테이퍼 비의 영향은 비슷한 것으로 분석되었으나 테이퍼 비가 클수록 고유진동수에 대한 영향이 증가하였으며 1차 고유진동수에서 가장 큰 영향을 보였다. 또한, 폭이 테이퍼진 레일레이 보에서 길이 변화에 따라 테이퍼 비에 대한 회전관성의 영향은 각각의 모드에서 유사한 것으로 나타났다.

이 연구를 활용하여 레일레이 보 구조물의 임의의 위치에 존재하는 상태량의 변화(집중질량, 균열, 탄성지지의 영향 등)가 고려된 응용연구가 가능하다. 또한, 회전익의 진동해석을 통하여 활용범위를 넓힐 예정이다.

후 기

이 연구는 2022학년도 경기대학교 대학원 연구원 장학생 장학금 지원에 의하여 수행되었음.

References

- (1) Banerjee, J. R. and Jackson, D. R., 2013, Free Vibration of a Rotating Tapered Rayleigh Beam: A Dynamic Stiffness Method of Solution, *Computers & Structures*, Vol. 124, pp. 11~20.
- (2) Ozdemir Ozgumus, O. and Kaya, M. O., 2010, Vibration Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Beam using DTM, *Meccanica*, Vol. 45, No. 1, pp. 33-42.
- (3) Kempe, M. D., Morse, J., Eafanti, J., Julien, S. E., Wan, K. T., Bruckman, L. S., Wang, Y., French, R. H., Fairbrother, A., Gu, X., Napoli, S., O'Brien, G. S., Hauser, A. W. and Boyce, K. P., 2021, Measurement of Crack Length in Width Tapered Beam Experiments, *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol. 35, No. 4, pp. 357~374.
- (4) Tang, A. Y., Li, X. F., Wu, J. X. and Lee, K. Y., 2015, Flapwise Bending Vibration of Rotating Tapered Rayleigh Cantilever Beams, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 112, pp. 1~9.
- (5) Li, X. F., Tang, A. A. and Xi, L. Y., 2013, Vibration of a Rayleigh Cantilever Beam with Axial Force and Tip Mass, *Journal of constructional Steel Research*. Vol. 80, pp. 15~22.
- (6) Chen, Y. F., Zang, Z. P., Dong, S. H., Ao, C., Liu, H., Ma, S., Hou, F. and Feng, W., 2021, Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Tapered Rayleigh Beams for the Application of Offshore Wind Turbine

Blades, *China Ocean Engineering*, Vol 35, No. 4, pp. 544~553.

(7) Lee, J. W., Kim, J. H. and Lee, J. Y., 2015, Exact Solutions for Bending Vibration of Beam with Linearly Reduced Width Along Its Length, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 25, No. 6, pp. 420~425.

(8) Ozgumus, O. O. and Kaya, M. O., 2006, Flapwise Bending Vibration Analysis of Double Tapered Rotating Euler-bernoulli Beam by using the Differential Transform Method, *Meccanica*, Vol. 41, No. 6, pp. 661~670.

(9) Lee, J. W. and Lee, J. Y., 2017, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Bernoulli-euler Beams Using an Exact Transfer Matrix Expression, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 122, pp. 1~17.



Min Gyu Park received his B.S. degrees in the school of Mechanical Engineering in 2022 from Kyonggi University. He is pursuing M.S. in the school of Mechanical Engineering from Kyonggi University. Currently his research interests are in structural

vibration.



Jung Woo Lee received B.S., M.S., and Ph.D. degrees from Kyonggi University in 2002, 2004, and 2017, respectively. He is currently an assistant professor at the Department of Mechanical System Engineering of Kyonggi University.

His research interests are in structural vibration, composite structures, and the transfer matrix method.