

탄성지지와 균열을 가지는 폭이 테이퍼진 보의 진동 해석

Vibration Analysis of Width-tapered Beams with Elastic Supports and Edge Cracks

박민규* · 최하늘* · 이정우†
Min Gyu Park*, Ha Nuel Choi* and Jung Woo Lee†

(Received August 28, 2023 ; Revised September 18, 2023 ; Accepted September 18, 2023)

Key Words : Tapered Beam(테이퍼진 보), Elastic Support(탄성지지), Crack(균열), Taper Ratio(테이퍼 비)

ABSTRACT

Here, a numerical method for free vibration analysis of the elastically restrained width-tapered beams with open-edge cracks is developed. This method is utilized to analyze the effects of the crack and elastic supports on the eigenpairs of the tapered beams. The tapered beam model has both elastic supports and an edge crack at both ends. The cracks are modeled as rotational springs, and the elastic supports are modeled as translational and rotational springs. The frequency determinant employs the transfer matrix method. The accuracy of this method is demonstrated by comparing the results obtained from the proposed method with those obtained from ANSYS. Studies on tapered beams in which the effects of both cracks and elastic supports are considered are difficult to find. Therefore, the results analyzed here can be adopted as a benchmark solution to prove the accuracy of other approaches.

1. 서 론

테이퍼진 보 구조물은 보 요소의 길이를 따라 선형적으로 변하는 단면의 특성으로 인해 질량대비 높은 강성비를 가진 구조물로 터빈 블레이드, 헬리콥터 로터 블레이드 등 기계 구조물과 건축 및 토목 구조물에서 폭넓게 사용되었다^(1,2).

테이퍼진 보 구조물은 제작 결함이나 환경적 영향에 의해 균열이 발생하고, 균열은 구조물의 동특성에 영향을 미친다. 구조물에서 균열의 영향을 분석하기 위하여

많은 연구들은 균열 부위에서 발생된 국부응력을 토대로 균열 발생부에서의 추가적 변위를 평가할 수 있는 변위와 강성에 대한 형상 함수들을 연구하였다^(3,4).

이러한 변위 함수들은 보 요소에서 발생한 균열이 구조물의 동특성에 미치는 영향을 평가하기 위하여 많은 연구자들에 의해 사용되었다⁽⁵⁾. 테이퍼진 보의 균열에 대한 연구는 보 단면의 높이가 선형적으로 변할 수 있는 구조물에 대하여 연구하였다⁽⁶⁾. 단면의 폭과 높이가 동일한 테이퍼 비에 의하여 동시에 선형적으로 감소하는 보 구조물에 대한 균열의 영향도 분석되었다⁽⁷⁾. 또한, 단면의 폭이 선형적으로 변하는 테이퍼

† Corresponding Author ; Member, Department of Mechanical System Engineering, Kyonggi University, Professor
E-mail : j.w.lee@kyonggi.ac.kr

* Member, Department of Mechanical Engineering, Kyonggi University, Student

‡ Recommended by Editor Yunsang Kwak
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

보의 동특성에 대한 균열의 영향이 연구 되었으나⁽⁸⁾, 이들 연구들은 완전 고정 조건 하에서 임의의 위치에 균열이 존재했을 때 테이퍼진 보 구조물의 동특성에 미치는 영향을 분석한 연구들이다.

하지만, 완벽한 고정조건을 부여하기 어려운 많은 구조물들에서 탄성지지를 사용하여 경계조건을 부여하여 구조물의 동특성을 평가하였다^(9,10). 탄성지지를 가지고 임의의 위치에 균열을 가지는 보 구조물의 동특성 해석을 통하여 실용 구조물에 대한 적용 효율성을 실험 결과와 수치적 결과를 비교함으로써 논증하였다^(11,12). 그러나, 이 연구들은 균일한 단면을 가지는 보 구조물에 대한 연구로 외팔보 타입과 자유-자유 경계조건에 대한 연구가 수행되었다. 고정부에서의 탄성지지는 병진스프링과 회전스프링으로 모델링하였고, 균열부는 회전 스프링으로 모델링하였다.

현재의 연구는 양단에 균열과 탄성지지를 가지는 보 구조물의 고유진동수에 대한 이들의 영향을 분석할 수 있는 수치적 모델을 개발하는 것이 목적이다. 선행연구에서 개발된 균열을 가지는 폭이 테이퍼진 보에 대한 수치적 모델⁽⁸⁾을 개선하여 고유진동수와 모드형상에 미치는 이들의 영향을 분석하였다. 방법의 정확도는 유한요소해석 프로그램(ANSYS)에서 얻어진 결과들과 비교를 통하여 논증하였다. 또한, 보 요소의 양단뿐만 아니라 임의의 위치에 탄성지지를 동시에 가지는 보 구조물 등 다양한 실용적 예제를 들어 제안된 방법의 효율성을 입증하였다.

2. 이 론

Fig. 1에 제시된 것과 같이 양단에 탄성지지와 균열을 가지는 하나의 폭이 테이퍼진 보를 고려하자. 여기서, XYZ는 좌표계이고, 테이퍼 비($c=(b_0 - b(x))/b_0$)가 0일 때 단면의 폭과 높이는 b_0 와 h_0 , 전체길이는 L , 테이퍼 비에 의해 길이를 따라 변화하는 단면의 폭은 $b(x)$ 이다. a_1 과 a_2 는 양단에서의 균열의 크기, K_{W1} , K_{W2} , $K_{\Phi 1}$ 과 $K_{\Phi 2}$ 는 각각 양단에서의 병진스프링과 회전 스프링이다. 또한, $C_{\Phi 1}$ 과 $C_{\Phi 2}$ 는 균열의 크기에 의존하는 Z축 회전에 관한 회전 스프링이다. 개방균열이 고려되었고, 회전관성과 전단변형의 영향은 무시하였다.

선행연구에서 개발된 균열과 탄성지지의 영향을 고려하지 않은 보요소의 미분방정식과 굽힘 모멘트는

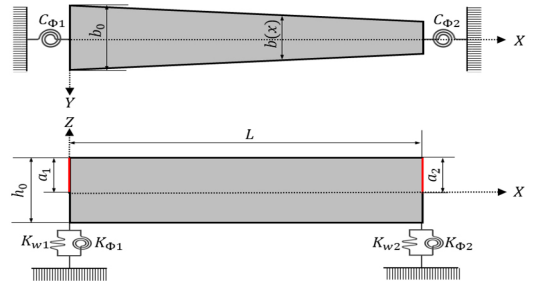


Fig. 1 Geometry of a width-tapered beam with elastic supports and edge cracks at both ends

식 (1) ~ 식 (3)과 같다⁽⁸⁾.

$$(EI(x)w''')'' + m(x)\ddot{w} = 0 \tag{1}$$

$$V = (EI(x)w'')' \tag{2}$$

$$M = -EI(x)w'' \tag{3}$$

여기서, M 과 V 는 굽힘 모멘트와 전단력이고, $m(x)$ 와 $EI(x)$ 는 c 의해 길이를 따라 변화하는 단위길이 당 질량과 굽힘 강성으로 식 (4) ~ 식 (5)와 같다.

$$EI_{(x)} = EI_0(1 - \zeta) \tag{4}$$

$$m(x) = m_0(1 - \zeta) \tag{5}$$

여기서, EI_0 과 m_0 은 $c=0$ 일 때의 값들이며, $\zeta = c\bar{x}$ 이고 $\bar{x}(=x/L)$ 는 무차원 길이이다.

변수 분리 후 식 (1)을 무차원으로 표현하면

$$(1 - \zeta)W'''' - 2W'''' - \alpha^2(1 - \zeta)W = 0 \tag{6}$$

여기서, $\alpha^2 = \frac{m_0\omega^2 L^4}{EI_0 c^4}$.

식 (6)의 해는 식 (7)과 같이 가정할 수 있다.

$$W(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{7}$$

여기서, a_{i+1} 는 Frobenius 법의 계수이다.

균열과 탄성지지가 고려되지 않은 전달행렬의 유도과정은 선행연구와 동일하며 주요 수식들은 식 (8) ~ 식 (10)과 같이 정의 된다⁽⁸⁾.

결정방정식,

$$k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0 \tag{8}$$

순환관계식,

$$a_{i+5} = \frac{k+i+2}{(k+i+4)} a_{i+4} - \frac{\alpha^{-2}}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+1} + \frac{\alpha^{-2}}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_i \quad (9)$$

Frobenius 법의 계수 $a_1 \sim a_5$,

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{(k-1)}{(k+1)} a_1, a_3 = \frac{k}{(k+2)} a_2, a_4 = \frac{(k+1)}{(k+3)} a_3, a_5 = \frac{(k+2)}{(k+4)} a_4 - \frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_1 \quad (10)$$

미분방정식의 일반해는 결정방정식의 4개의 근으로부터 식 (11)과 같이 정의 된다.

$$W(\zeta) = A_1 f(\zeta, 0) + A_2 f(\zeta, 1) + A_3 f(\zeta, 2) + A_4 f(\zeta, 3) \quad (11)$$

여기서, $f(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i}$, $A_1 \sim A_4$ 는 임의의 상수이다. 전달행렬의 주요 요소인 기울기(Φ), 전단력, 굽힘 모멘트는 식 (12) ~ 식 (14)와 같다.

$$\Phi(\zeta) = \frac{c}{L} \{A_1 f'(\zeta, 0) + A_2 f'(\zeta, 1) + A_3 f'(\zeta, 2) + A_4 f'(\zeta, 3)\} \quad (12)$$

$$V(\zeta) = N_1 \{(1-\zeta) f'''(\zeta, j-1) - f''(\zeta, j-1)\} A_j \quad (13)$$

$$M(\zeta) = N_2 (1-\zeta) f''(\zeta, j-1) A_j \quad (14)$$

여기서, $N_1 = -EI_0 c^3 / L^3$, $N_2 = EI_0 c^2 / L^2$.

양단에서의 상태량의 관계로부터 전달행렬은 식 (15)와 같이 행렬로 표현된다.

$$\{Z\}_{\bar{x}=1} = [T_{ij}] \{Z\}_{\bar{x}=0} \quad (15)$$

여기서, $[T_{ij}] = [H_{ij}] [C_{ij}]^{-1}$, $\bar{x}=0$ 에서의 상태량 $\{Z\}_{\bar{x}=0} = [W, \Phi, M, V]_{\bar{x}=0}^T$ 이고, $\bar{x}=1$ 에서의 상태량은 $\{Z\}_{\bar{x}=1} = [W, \Phi, M, V]_{\bar{x}=1}^T$ 이며 위첨자 T 는 전치행렬을 의미한다.

전달행렬법의 특성을 이용한 균열부에서의 전달행렬은 식 (16)과 같다.

$$\{Z\}_{\bar{x}=1} = [C_{ij}] \{Z\}_{\bar{x}=0}, [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 01 - C_{\Phi}^* & 0 \\ 00 & 1 & 0 \\ 00 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $C_{\Phi}^* = 1/C_{\Phi}$ 이며 $\bar{x}=0$ 에서 $C_{\Phi 1}^* = 1/C_{\Phi 1}$, $\bar{x}=1$ 에서 균열의 영향은 $C_{\Phi 2}^* = 1/C_{\Phi 2}$ 이고, 식 (17)의 강성 표현으로 정의 된다⁽³⁾.

$$C_{\Phi} = \frac{EI_0(1-\zeta)}{6\pi(1-\nu^2)h_0 f(s)} \quad (17)$$

여기서, ν 는 푸아송 비이고, $s = a/h_0$ 이며 함수 $f(s)$ 는 식 (18)로 정의된다.

$$f(s) = 0.6272s^2 - 1.04533s^3 + 4.5948s^4 - 9.9736s^5 + 20.2948s^6 - 33.035s^7 + 47.1063s^8 - 40.7556s^9 + 19.6s^{10} \quad (18)$$

탄성지지의 영향은 전달행렬의 특성을 이용하여 식 (19)와 같이 정의 할 수 있다.

$$\{Z\}_{\bar{x}=1} = [K_{ij}] \{Z\}_{\bar{x}=0}, [K_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 00 \\ 0 & 1 & 00 \\ 0 & \beta K_{\Phi} & 10 \\ \beta K_W & 0 & 01 \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서, K_{Φ} 와 K_W 는 $\bar{x}=0$ 에서 $K_{\Phi 1}$ 와 K_{W1} , $\bar{x}=1$ 에서는 $K_{\Phi 2}$ 와 K_{W2} 이다. 또한, β 는 부호 규정으로 $\bar{x}=0$ 에서는 음의 값(-)을 가지고, $\bar{x}=1$ 에서는 양의 값(+)-을 가진다.

양단에서 균열의 영향과 탄성지지의 영향이 고려된 단일 보 요소에 대한 전달행렬은 식 (20)과 같다.

$$\{Z\}_{\bar{x}=1} = [T_{ij}^*] \{Z\}_{\bar{x}=0} \quad (20)$$

여기서, $[T_{ij}^*] = [K_{ij}]_2 [C_{ij}]_2 [T_{ij}] [C_{ij}]_1 [K_{ij}]_1$ 로 양단에 탄성지지와 균열의 영향이 포함된 요소 전달행렬이다. $[K_{ij}]_1$ 과 $[C_{ij}]_1$ 는 $\bar{x}=0$ 에서의 탄성지지와 균열의 영향이고, $[K_{ij}]_2$ 과 $[C_{ij}]_2$ 는 $\bar{x}=1$ 에서의 탄성지지와 균열의 영향이다.

식 (20)을 사용하여 양단에서의 탄성지지와 균열의 영향을 고려하는 테이퍼진 보의 고유진동수를 결정할 수 있으나, 양단사이에 존재하는 탄성지지가 균열의 영향을 고려하기 위해서는 다음과 같이 전달행렬의 일반적인 조립 방법에 의해 전체 전달행렬을 조립할

수 있다.

$$\{Z\}_{\bar{x}=1} = [T_{ij}^*]_n \cdots [T_{ij}^*]_3 [T_{ij}^*]_2 [T_{ij}^*]_1 \{Z\}_{\bar{x}=0} \quad (21)$$

여기서, 아래첨자 1은 첫 번째, 2는 두 번째, 3은 세 번째, n 은 n 번째 테이퍼진 보 요소이다.

테이퍼진 보의 고유진동수에 대하여 양단 사이에 존재하는 균열이나 탄성지지의 영향을 분석하기 위해서는 식 (21)을 사용해야 한다.

3. 결과 및 고찰

제안된 방법의 정확도를 검증하고, 고유진동수에 관한 탄성지지와 균열의 영향을 분석하기 위해서 사용된 물성치는 $E=200$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³, $L=0.8$ m, $b_0=0.03$ m, $h_0=0.01$ m, $\nu=0.3$ 이 사용되었다. 다양한 지지조건에 대한 균열의 영향을 분석하기 위해 사용된 보 모델은 Fig. 2(a)~Fig. 2(d)에 나타난다.

우선, 완전 고정조건에 수렴하는 스프링 상수 값을

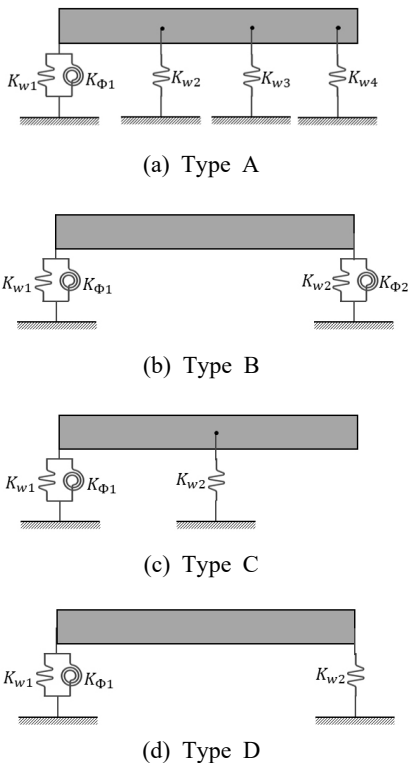


Fig. 2 Beam types to consider various boundary condition

확인하게 위하여 0부터 $9.74 \times 10^9 (= \exp(23))$ 까지 값을 지수함수로 증가시켰다. 회전스프링과 병진스프링의 단위는 각각 Nm/rad와 N/m이다. $\bar{x}=0$ 에 부착된 탄성 지지를 고려하였다. 1차~3차 고유진동수가 검토되었고, 무차원 고유진동수($\bar{\omega}^2 = \sqrt{m_0 \omega^2 L^4 / EI_0}$)로 표현되었다. 테이퍼 비 $c=0 \sim 0.5$ 까지 고려되었고, 분석된 결과는 Fig. 3에 제시되었다. 검토 결과 완전 고정 조건을 부여하기 위하여 $K_{\phi}=1.32$ GNm/rad, $K_{w}=9.74$ GN/m가 사용되어야 한다.

제안된 방법의 정확도를 논증하기 위하여 ANSYS와 제안된 방법에서 계산된 결과들이 비교 되었고, 사용된 보 모델은 Fig. 2(a)에서 보여지는 type A이다. 균열은 고려되지 않았고, Case 1은 $\bar{x}=0$ 에서 $K_{\phi1}$ 와 K_{w1} 값은 고정조건에 상응하는 값이 사용하였고,

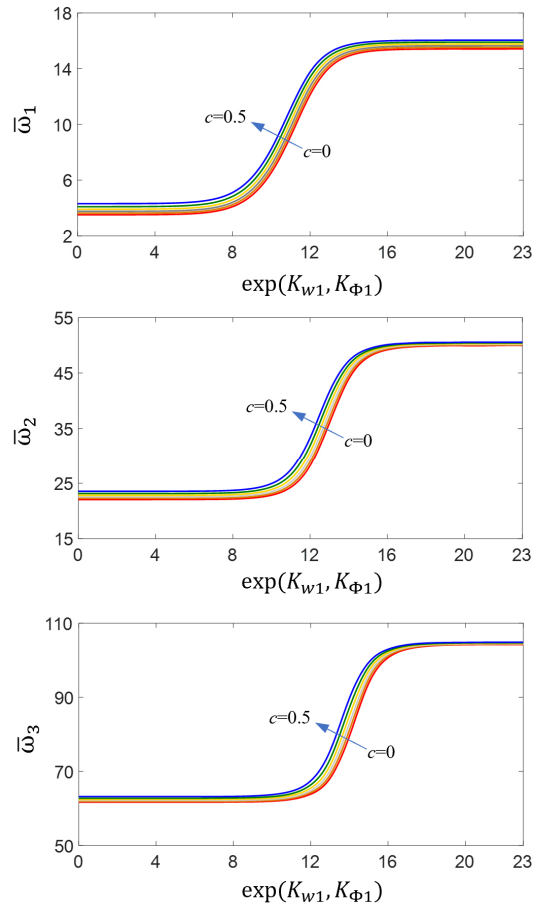


Fig. 3 Variations in the first three nondimensional natural frequencies depending on the spring values

$\bar{x}=0.3$, $\bar{x}=0.7$, $\bar{x}=1$ 에서 $K_{W2}=K_{W3}=K_{W4}=5000$ N/m 을 각각 사용하였다. 또한, Case 2는 동일한 조건에서 $K_{W2}=485.17$ MN/m²으로 변경하였고, Case 3는 Case 1 과 동일한 조건에서 $K_{W4}=485.17$ MN/m²으로 변경하

였다. 계산된 결과들은 Table 1에 제시하였다. 비교결과는 우수한 일치를 보였다.

따라서, Fig. 2에 보여진 4가지 보 모델을 사용하여 다양한 지지조건과 균열의 영향들을 분석하였고, 먼저 검토된 것은 type A이다. Case 1에서 $K_{W2}=K_{W3}=K_{W4}=22.03$ kN/m을 각각 사용하였다. $s=0.5$, $c=0 \sim 0.5$, 한 개의 균열 위치는 $\bar{x}=0$ 부터 $\bar{x}=1$ 까지 0.1의 간격에서 위치가 변화되는 것으로 하였다. 계산된 결과들은 Table 2에 제시하였다.

Fig. 4는 Table 2에서 계산된 결과를 가지고 균열의 위치에 대한 주파수 비로써 나타내었다. 선행연구⁽⁸⁾에서 분석된 탄성지지가 없는 결과의 경우 $\bar{x}=0$ 에서 균열이 존재할 때 1차 고유진동수가 가장 큰 영향을 받았다. 하지만, Fig. 4에 보여지는 것과 같이 $\bar{x}=0$ 에서의 균열의 영향은 3차 고유진동수가 가장 큰 것으로 나타났고, 1차 고유진동수가 가장 작은 영향을 받았다. 이것은 탄성지지가 보의 $\bar{x}=0.3$, $\bar{x}=0.7$, $\bar{x}=1$ 의 위치에 설치되었기 때문으로 보여진다. 테이퍼 비의

Table 1 First three natural frequencies computed between the present method and ANSYS

Case	Mode No.	Natural frequency [Hz]		
		Present	ANSYS	Diff.(%)
1	1	29.064	29.090	0.0897
	2	88.937	89.072	0.1511
	3	230.93	231.44	0.2186
2	1	37.641	37.692	0.1355
	2	152.62	152.87	0.1604
	3	410.30	409.71	-0.1446
3	1	60.221	60.330	0.1812
	2	184.09	184.44	0.1877
	3	380.05	379.81	-0.0630

Table 2 Effect of the cracking on the natural frequencies of elastically restrained width-tapered beams having $s=0.5$

c	Mode No.	Natural frequencies [rad/s]											
		Intact	$\bar{x}=0$	$\bar{x}=0.1$	$\bar{x}=0.2$	$\bar{x}=0.3$	$\bar{x}=0.4$	$\bar{x}=0.5$	$\bar{x}=0.6$	$\bar{x}=0.7$	$\bar{x}=0.8$	$\bar{x}=0.9$	$\bar{x}=1.0$
0	1	254.81	250.12	252.08	253.50	254.38	254.79	254.68	254.48	254.56	254.30	254.49	254.81
	2	564.91	536.66	556.82	564.72	561.10	551.71	546.72	549.82	557.59	563.19	564.78	564.90
	3	1438.0	1358.4	1433.4	1421.5	1396.3	1416.5	1437.9	1409.4	1382.3	1400.6	1433.2	1438.0
0.1	1	264.47	259.45	261.55	263.09	264.02	264.45	264.30	264.07	264.15	263.88	264.11	264.45
	2	574.63	546.29	566.50	574.54	570.86	561.44	556.45	559.55	567.42	573.11	574.61	574.62
	3	1445.3	1365.4	1440.5	1429.0	1403.4	1423.5	1445.2	1416.8	1389.6	1408.0	1440.5	1445.3
0.2	1	275.38	269.95	272.24	273.92	274.92	275.37	275.16	274.90	275.00	274.71	274.97	275.37
	2	586.04	557.60	577.79	585.94	582.29	572.77	567.76	570.99	579.00	584.65	586.03	586.03
	3	1453.9	1373.6	1448.8	1437.7	1411.8	1431.8	1453.8	1425.4	1398.3	1416.6	1449.2	1453.9
0.3	1	287.69	281.74	284.27	286.13	287.23	287.68	287.40	287.09	287.24	286.90	287.22	287.68
	2	599.57	571.03	591.22	599.46	595.81	586.18	581.19	584.61	592.76	598.35	599.56	599.56
	3	1464.0	1383.5	1458.8	1448.0	1421.8	1441.7	1464.0	1435.6	1408.5	1427.0	1459.5	1464.0
0.4	1	301.69	295.06	297.92	300.00	301.22	301.66	301.29	300.92	301.12	300.75	301.14	301.67
	2	616.02	587.34	607.58	615.91	612.19	602.42	597.51	601.20	609.51	615.00	615.99	616.00
	3	1476.5	1395.5	1471.1	1460.6	1434.0	1453.9	1476.4	1447.9	1421.0	1439.7	1472.1	1476.5
0.5	1	317.71	310.21	313.49	315.88	317.24	317.67	317.17	316.72	317.00	316.59	317.06	317.69
	2	636.63	607.76	628.14	636.52	632.65	622.72	617.97	622.04	630.54	635.86	636.55	636.61
	3	1492.3	1410.9	1486.8	1476.4	1449.5	1469.6	1492.2	1463.4	1436.9	1456.1	1488.2	1492.3

영향으로 1차 고유진동수는 $\bar{x}=0$ 에서 $c=0.5$ 일 때, 2차 고유진동수는 $c=0$ 일 때, 3차 고유진동수는 $c=0$ 일 때 균열의 영향이 가장 컸다. 하지만, 1차와 2차 고유진동수에 비하여 3차 고유진동수는 거의 유사한 영향을 받았다.

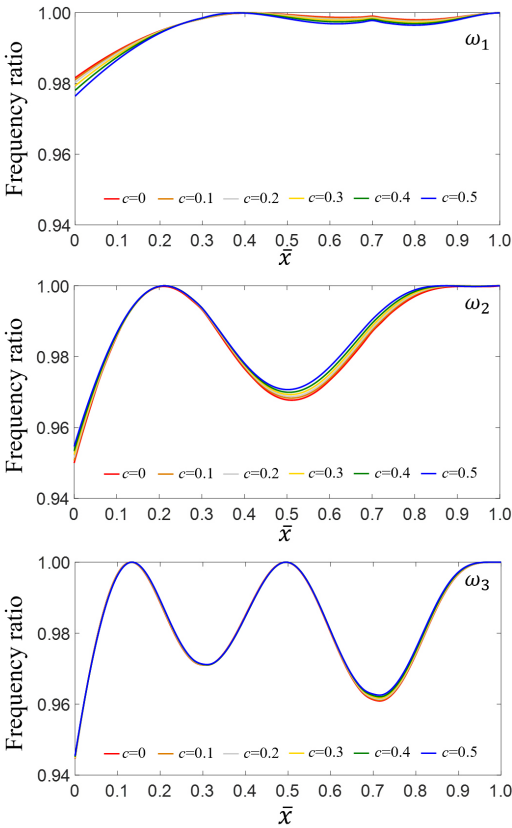


Fig. 4 Effects of the cracking on the natural frequencies of elastically restrained width-tapered beams

또한, Fig. 4에서 보여지는 것과 같이 1차 고유진동수에 대한 균열의 영향은 탄성지지의 영향으로 일부 위치 $\bar{x}=0.25 \sim 0.4$ 에서 $c=0$ 일 때 가장 큰 영향을 받았고 테이퍼비의 영향은 다른 위치와는 반대였다. 3차 고유진동수도 일부 위치에서 테이퍼 비에 대한 영향이 반대이나 그 차이는 크지 않았다. 2차 고유진동수의 경우는 테이퍼 비의 영향이 $\bar{x}=0.5$ 에서 가장 크게 나타났다. 또한, 탄성지지가 없는 선행연구결과⁽⁸⁾ (Figs. 2~4)와 비교했을 때, $\bar{x}=0$ 에서의 균열의 영향은 1차 고유진동수가 다른 고유진동수들에 비하여 탄성지지의 영향을 크게 받은 것을 알 수 있다.

Fig. 2에서 제시된 4가지 type에 대한 탄성지지와 균열에 대한 계산 결과는 Table 3 ~ Table 6에 목록화하였다. Type A에 대한 결과는 Table 3에 제시하였고, type B에 대한 결과는 Table 4에, type C에 대한 결과는 Table 5에, type D에 대한 결과는 Table 6에 나타냈다. Types A, C, D는 임의의 위치에 존재하는 여러개의 균열에 대한 고유진동수의 변화를 분석하였다. 고유진동수에 대한 테이퍼 비의 영향도 함께 고려하였다. 균열의 크기와 위치는 type 마다 다르다.

Type B는 $\bar{x}=0$ 혹은 $\bar{x}=1$ 에 한 개의 균열이 있을 때 고유진동수의 변화를 분석하였고, $s=0 \sim 0.5$ 와 $c=0.5$ 를 고려하였다. 테이퍼 비의 영향을 비교를 위하여 type A, C, D 모델에 대한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 동일한 탄성지지 조건에서 균열이 있는 보와 없는 보의 비교가 이루어졌고 탄성지지가 $\bar{x}=1$ 에 가깝게 지지될 경우 Fig. 5에서 type A와 D 그리고 균열이 없는 보와 비교하여 테이퍼 비의 영향이 거의 유사한 것으로 나타났다. 그러나, 탄성지지가 중앙에 되어있는 type C의 경우 테이퍼 비의 영향은 큰 것으로 나타났다. 즉, 탄성지지가 $\bar{x}=0$ 에 가까워질수록 테이

Table 3 First three natural frequencies of Type A model

BCs, K_{ϕ} [Nm/rad], K_W [N/m]	Location and size of crack	Mode No.	Natural frequencies [rad/s]					
			$c=0$	$c=0.1$	$c=0.2$	$c=0.3$	$c=0.4$	$c=0.5$
at $\bar{x}=0$: $K_{\phi}=1.32 \times 10^9$, $K_W=9.74 \times 10^9$ at $\bar{x}=0.3$: $K_W=403.5$ at $\bar{x}=0.6$: $K_W=2.98 \times 10^3$ at $\bar{x}=0.9$: $K_W=22.03 \times 10^3$	Intact	1	202.18	210.18	219.30	229.72	241.75	255.78
		2	518.27	524.95	532.76	542.03	553.30	567.54
		3	1406.3	1411.3	1417.0	1423.8	1431.9	1442.1
	s=0.2 at $\bar{x}=0.2$ s=0.1 at $\bar{x}=0.5$ s=0.3 at $\bar{x}=0.7$	1	201.95	209.93	219.04	229.43	241.41	255.38
2		514.86	521.51	529.30	538.54	549.81	564.06	
3		1387.1	1392.1	1397.9	1404.6	1412.8	1422.9	

파 비의 영향이 커진다는 것으로 분석되었다.

에 대한 균열의 영향을 비교 하였다. 두 조건 사이에 1차 고유진동수는 유사한 영향을 보였으나 2차와 3차 고유진동수는 고정조건에서 균열의 영향이 큰 것으로

Fig. 6은 $\bar{x}=0$ 에서 $K_{\phi}=K_W=162.8 \times 10^6 (= \exp(12))$ 의 값을 가지는 탄성지지 보와 고정조건을 가지는 보

Table 4 First three natural frequencies of elastically restrained tapered beam with a crack when $c=0.5$

BCs, K_{ϕ} [Nm/rad], K_W [N/m]	Location of crack	Mode No.	Natural frequencies [rad/s]					
			$s=0$	$s=0.1$	$s=0.2$	$s=0.3$	$s=0.4$	$s=0.5$
at $\bar{x}=0$ $K_{\phi}=1.32 \times 10^9, K_W=9.74 \times 10^9$	$\bar{x}=0$	1	98.244	98.025	97.395	96.295	94.527	91.692
		2	535.47	534.22	530.68	524.70	515.55	502.02
		3	1438.9	1435.5	1426.0	1410.4	1387.7	1356.4
at $\bar{x}=0$ $K_{\phi}=162.8 \times 10^6, K_W=162.8 \times 10^6$	$\bar{x}=0$	1	96.578	96.447	95.841	94.780	93.074	90.326
		2	406.80	406.47	405.27	403.22	400.04	395.10
		3	852.55	852.46	852.21	851.78	851.12	850.12
Type B model at $\bar{x}=0$ and $\bar{x}=1$: $K_{\phi}=1.32 \times 10^9, K_W=9.74 \times 10^9$	$\bar{x}=0$	1	505.01	503.80	500.36	494.52	485.55	472.20
		2	1398.1	1394.7	1385.4	1370.1	1347.6	1316.7
		3	2745.9	2739.4	2721.4	2692.7	2652.7	2601.2
	$\bar{x}=1$	1	505.01	503.80	500.38	494.61	485.91	473.51
		2	1398.1	1394.7	1385.5	1370.4	1348.6	1319.8
		3	2745.9	2739.4	2721.6	2693.4	2654.6	2606.4
Type B model at $\bar{x}=0$ and $\bar{x}=1$: $K_{\phi}=162.8 \times 10^6, K_W=162.8 \times 10^6$	$\bar{x}=0$	1	361.90	361.45	360.16	357.94	354.48	349.19
		2	674.76	674.75	674.74	674.72	674.69	674.64
		3	1182.5	1181.6	1179.1	1174.9	1168.9	1160.8
	$\bar{x}=1$	1	361.90	361.46	360.21	358.06	354.76	349.91
		2	674.76	674.49	673.74	672.48	670.59	667.92
		3	1182.5	1182.5	1182.4	1182.1	1181.8	1181.3

Table 5 First three natural frequencies of Type C model

BCs, K_{ϕ} [Nm/rad], K_W [N/m]	Location and size of crack	Mode No.	Natural frequencies [rad/s]					
			$c=0$	$c=0.1$	$c=0.2$	$c=0.3$	$c=0.4$	$c=0.5$
at $\bar{x}=0$: $K_{\phi}=1.32 \times 10^9, K_W=9.74 \times 10^9$ at $\bar{x}=0.5$: $K_W=22.03 \times 10^3$	Intact	1	106.31	109.94	114.13	119.00	124.75	131.69
		2	525.29	531.16	537.80	545.32	554.00	564.24
		3	1404.7	1409.5	1415.0	1421.5	1429.2	1438.9
	$s=0.2$ at $\bar{x}=0.3$ $s=0.3$ at $\bar{x}=0.7$	1	104.34	106.88	109.77	113.09	116.95	121.55
		2	522.00	523.08	524.66	526.90	530.05	534.50
		3	1379.9	1380.1	1380.9	1382.5	1385.3	1389.9

Table 6 First three natural frequencies of Type D model

BCs, K_{ϕ} [Nm/rad], K_W [N/m]	Location and size of crack	Mode No.	Natural frequencies [rad/s]					
			$c=0$	$c=0.1$	$c=0.2$	$c=0.3$	$c=0.4$	$c=0.5$
at $\bar{x}=0$: $K_{\phi}=1.32 \times 10^9, K_W=9.74 \times 10^9$ at $\bar{x}=1$: $K_W=22.03 \times 10^3$	Intact	1	208.72	215.87	223.86	232.75	242.71	253.91
		2	552.06	561.78	573.24	586.88	603.51	624.33
		3	1421.9	1428.5	1436.4	1445.8	1457.4	1472.3
	$s=0.2$ at $\bar{x}=0.2$ $s=0.1$ at $\bar{x}=0.5$ $s=0.3$ at $\bar{x}=0.7$	1	208.16	215.25	223.17	231.98	241.83	252.91
		2	549.42	559.18	570.69	584.41	601.14	622.10
		3	1402.8	1409.5	1417.3	1426.7	1438.3	1453.2

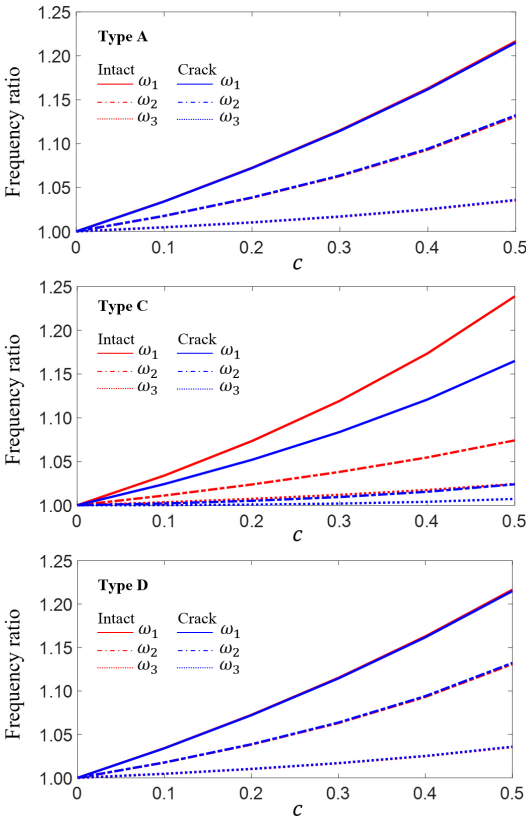


Fig. 5 Effects of the taper ratio on the natural frequencies of Type A, C, and D models

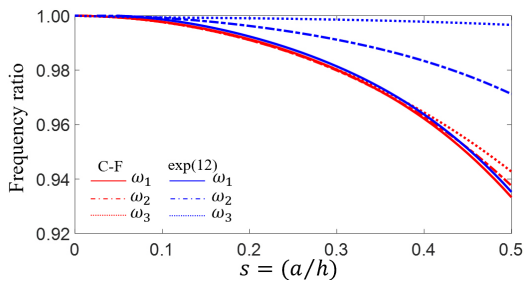
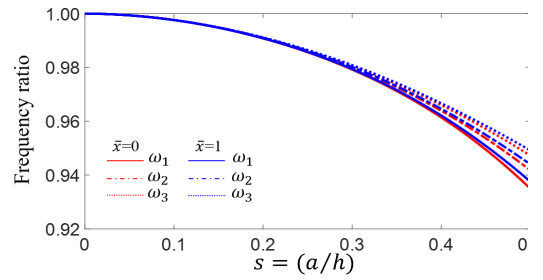


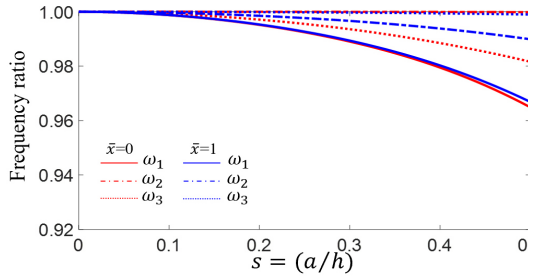
Fig. 6 Effects of the cracking on natural frequencies of tapered cantilever beams with elastic supports when having $c=0.5$

분석되었다.

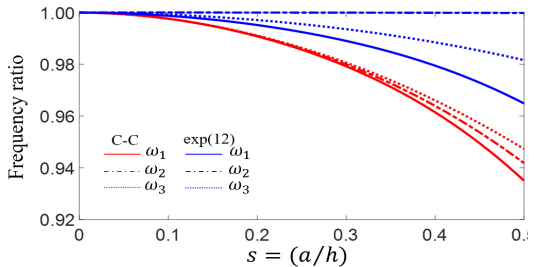
Fig. 7(a)~Fig. 7(d)는 양단에서 탄성지지를 가지는 보 구조물에 대한 균열의 영향을 비교 하였다. Fig. 7(a)는 양단 고정 조건을 가질 때 $\bar{x}=0$ 과 $\bar{x}=1$ 에 균열을 가지는 보이다. $\bar{x}=0$ 에서 균열이 있을 때 균열의 영향이 큰 것으로 나타났다. Fig. 7(b)는 양단에



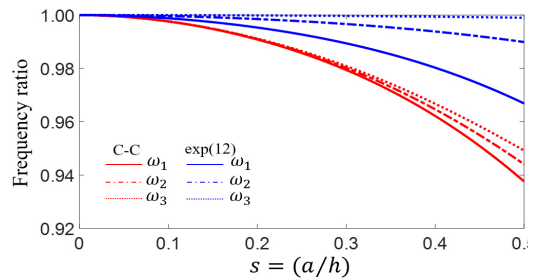
(a) C-C end condition



(b) $K_\phi = K_W = \exp(12)$ at both ends



(c) A crack at $\bar{x}=0$



(d) A crack at $\bar{x}=1$

Fig. 7 Effects of the cracking on natural frequencies of tapered beams with elastic supports at both ends when having $c=0.5$

서 $K_\phi = K_W = 162.8 \times 10^6 (= \exp(12))$ 의 값을 가지는 탄성지지 보에 대해 $\bar{x}=0$ 혹은 $\bar{x}=1$ 에 균열이 있을 때의 결과를 비교 한 것이다. $\bar{x}=0$ 에 균열이 있을 때 2차 고

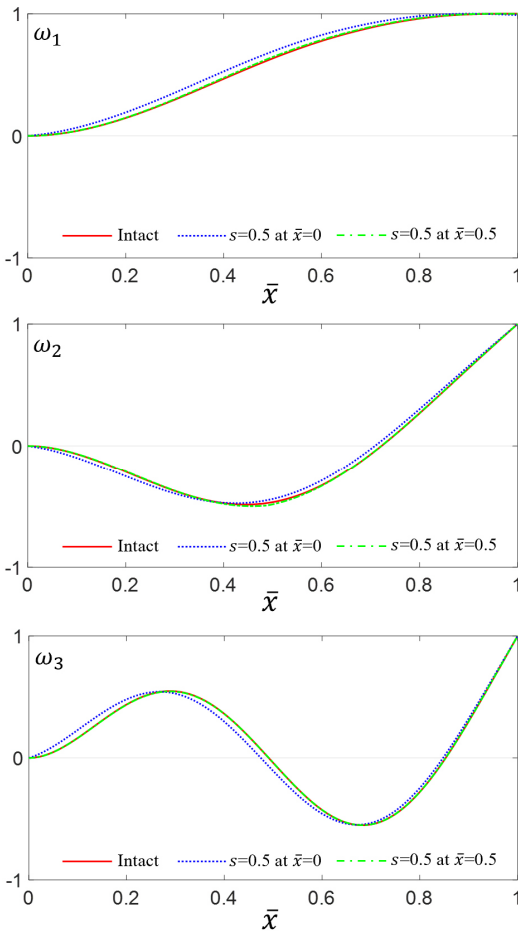


Fig. 8 Effects of the cracking on the first three mode shapes of elastically restrained width-tapered beams

유진동수와 $\bar{x}=1$ 에 균열이 있을 때의 3차 고유진동수는 균열의 영향이 다른 진동수들에 비해 거의 없는 것으로 분석되었다.

또한, Fig. 7(c)와 Fig. 7(d)는 균열이 $\bar{x}=0$ 과 $\bar{x}=1$ 에 있을 때 양단지지보와 탄성지지보의 비교 결과이다. 탄성지지보 보다 양단이 고정되었을 때 모든 고유진동수에서 균열의 영향이 크게 나타났다. 탄성 스프링의 값이 작을수록 고유진동수에 대한 균열의 영향은 작아지는 것으로 분석되었다.

모드형상에 대한 균열의 영향을 확인하기 위하여 Table 2에서 주어진 결과 중 $c=0.5$ 일 때 균열이 없는 보와 균열이 $\bar{x}=0$ 과 $\bar{x}=0.5$ 에 있는 보를 비교하였다. 균열의 크기는 $s=0.5$ 이고, 모드형상에 대한 비교 결과는 Fig. 8에 제시하였다. 균열이 없는 보와 균열의

위치가 $\bar{x}=0.5$ 에 있는 보의 모드 형상을 비교하였을 때 1차와 2차 모드형상은 균열의 영향에 대하여 작은 차이를 보였으나 3차는 유사하였다. 그러나, $\bar{x}=0$ 에 균열이 있는 보의 경우는 모든 모드형상이 균열이 없는 보와 비교하여 큰 차이를 보였다.

4. 결 론

폭이 테이퍼진 보에 대한 탄성지지와 균열의 영향을 분석하기 위하여 양단에 탄성지지와 균열을 가지는 보 모델에 대한 수치적 방법을 제안하였다. 방법의 정확도는 ANSYS로 계산된 결과와의 비교를 통하여 논증되었다. 이 연구를 통하여 분석된 주요 내용은 다음과 같다.

균열을 가지는 보에 대한 탄성지지는 탄성지지가 없는 보와 비교 했을 때 1차 고유진동수에 가장 큰 영향을 미쳤다. 완전 고정 조건을 가지는 보가 탄성지지를 가지는 보 구조물 보다 균열의 영향이 더 컸다. $\bar{x}=0$ 에서 고정 조건이고 임의의 위치에 탄성지지를 가지는 보 구조물은 $\bar{x}=1$ 로 탄성지지의 설치가 가까워질수록 균열을 가지더라도 고유진동수에 대한 테이퍼 비의 영향이 균열이 없는 탄성지지 보와 유사한 것으로 분석되었다.

현재의 연구는 회전관성과 전단변형의 영향을 고려하지 않았기 때문에 적용에 제한이 있어 향후 이들의 영향을 고려한 연구가 추가적으로 필요하다.

후 기

이 연구는 2021년도 한국연구재단 이공학개인지초 연구과제(Grant No. NRF-2021R1F1A1064233)와 2022학년도 경기대학교 대학원 연구원장학생 장학금 지원에 의하여 수행되었음.

References

- (1) Banerjee, J. R. and Jackson, D. R., 2013, Free Vibration of a Rotating Tapered Rayleigh Beam: A Dynamic Stiffness Method of Solution, Computers & Structures, Vol. 124, pp. 11~20.
- (2) Ozgumus, O. O. and Kaya, M. O., 2009, Vibration Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Beam

Using DTM, *Meccanica*, Vol. 45, No. 1, pp. 33~42.

(3) Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., 1998, A Continuous Cracked Beam Vibration Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.

(4) Loya, J. A., Rubio, L. and Fernández-Sáez, J., 2006, Natural Frequencies for Bending Vibrations of Timoshenko Cracked Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 3-5, pp. 640~653.

(5) Dimarogonas, A. D., 1996, Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 5, pp. 831~857.

(6) Chaudhari, T. D. and Maiti, S. K., 1999, Modelling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 4, pp. 425~445.

(7) Lee, J. W. and Lee, J. Y., 2018, A Transfer Matrix Method for In-plane Bending Vibrations of Tapered Beams with Axial Force and Multiple Edge Cracks, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 1, pp. 125~138.

(8) Lee, J. W., 2021, Bending Vibration Analysis of Width-tapered Beams with a Crack, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 31, No. 5, pp. 504~510.

(9) Luo, J., Zhu, S. and Zhai, W., 2022, Exact Closed-form Solution for Free Vibration of Euler-bernoulli and Timoshenko Beams with Intermediate Elastic Supports, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 213, 106842.

(10) De Rosa, M. A., Lippiello, M., Maurizi, M. J. and Martin, H. D., 2010, Free Vibration of Elastically Restrained Cantilever Tapered Beams with Concentrated Viscous Damping and Mass, *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, No. 2, pp. 261~264.

(11) Sinha, J. K., Friswell, M. I. and Edwards, S., 2002, Simplified Models for the Location of Cracks in

Beam Structures Using Measured Vibration Data, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 1, pp. 13~38.

(12) Zhang, W., Ma, H., Zeng, J., Wu, S. and Wen, B., 2017, Vibration Responses Analysis of an Elastic-Support Cantilever Beam with Crack and Offset Boundary, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 95, pp. 205~218.



Min Gyu Park received his B.S. degree in the school of mechanical engineering in 2022 from Kyonggi University. He is pursuing M.S. in the school of Mechanical Engineering from Kyonggi University. Currently his research interests are in struc-

tural vibration.



Ha Neul Choi received his B.S. degree in the school of Mechanical Engineering in 2022 from Kyonggi University. He is pursuing M.S. in the school of Mechanical Engineering from Kyonggi University. Currently his research interests are in

structural vibration.



Jung Woo Lee received B.S., M.S. and Ph.D. degrees from Kyonggi University in 2002, 2004 and 2017, respectively. He is currently an assistant professor at the Department of Mechanical System Engineering of Kyonggi University. His research

interests are in structural vibration, composite structures, and the transfer matrix method.