

고정단 평판의 전 주파수 대역 고유치 추출이 가능한 NDIF법 개발: 제2부(예제 연구 및 고찰)

Development of NDIF Method that Enables the Extraction of Eigenvalues in Entire Frequency Range of Clamped Plates: Part 2 (Example Studies and Consideration)

강 상 옥[†]
Sang Wook Kang[†]

(Received February 8, 2024 ; Revised March 5, 2024 ; Accepted March 6, 2024)

Key Words : Clamped Plate(고정단 평판), Spurious Eigenvalue(허위 고유치), Eigenvalue(고유치), Eigenmode(고유모드), NDIF Method(무차원 동영향 함수법), Matrix Rank(행렬 랭크), Finite Element Method(유한요소법), Boundary Element Method(경계요소법)

ABSTRACT

A problem arises in an eigenvalue analysis of an arbitrarily shaped clamped plate using the NDIF method. When the number of nodes is increased to improve the accuracy of the analysis results, the lower-order eigenvalues are not extracted because of the divergence of the system matrix in the low-frequency range. In Part 1 of this report, the cause of this problem was identified using a circular clamped plate with an exact solution, and a new NDIF method theory was proposed to overcome this problem. Part 2 reports the results of example verifications and analyses that were performed on clamped plates with two different shapes and no exact solution to prove the validity and accuracy of the proposed method. These example verifications confirmed that the proposed method could accurately extract eigenvalues and the eigenmode in an entire frequency range regardless of the number of nodes.

1. 서 론

저자가 임의의 형상 평판의 고정밀도 진동 해석을 위해 처음 개발한 NDIF법(non-dimensional dynamic influence function method)은⁽¹⁾, 유한요소법이나⁽²⁾ 경계요소법과는⁽³⁾ 차별적으로 노드와 노드 사이에 요소(element)를 구성하지 않기 때문에 보간 함수(interpolation function)에 대한 근사적 적분 과정이 필요로 하지 않

는 장점을 가진다. 그래서 NDIF법은 위의 두 방법보다 훨씬 더 정확한 고유치 추출 결과를 제공한다. 하지만, NDIF법은 노드의 개수를 증가시킬 경우 저주파수 영역에서 시스템 행렬이 발산하여 저주파수 고유치가 추출되지 않는 단점도 가진다.

최근에 저자는 노드 개수가 증가하더라도 저주파수 영역을 포함해서 전체 주파수 영역에서 고유치 추출이 가능하도록, 기존 NDIF법 이론을 개선하는 연구를 이 논문의 1부에서 수행하였다⁽⁴⁾. 이 연구에서,

[†] Corresponding Author ; Member, Hansung University, Professor
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

[‡] Recommended by Editor Chan Jung Kim
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

저주파수 영역에서 고유치가 구해지지 않는 이유가 시스템 행렬이 발산하여 시스템 행렬의 판별식이 정확히 계산되지 않기 때문임을 확인하였다. 그래서 노드의 개수가 증가하더라도 시스템 행렬의 판별식을 정확히 구할 수 있는 새로운 이론을 이 논문의 1부에서 제안하였으며, 논문의 2부에서는 논문 1부의 이론을 검증하기 위한 다양한 형상을 가진 고정단 평판에 대한 예제 연구 결과가 발표된다.

참고로, 이 연구에 대한 이론 부분은 이미 논문의 1부에서 상세히 제시되었기 때문에, 논문 2부에서는 자세한 이론 설명은 생략된다. 대신에, 논문 1부의 최종 결과물인, 시스템 행렬의 판별식 값을 정확히 계산할 수 있는 최종 식들만을 제시한다.

2. NDIF법에서의 고유치 추출 방법

2.1 기존 NDIF법

Fig. 1에서 점선으로 표시한 모양이 해석 대상 고정단 평판의 경계에 해당된다. 고정단 평판의 경계는 Fig. 1과 같이 N 개의 노드로 이산화된다. 평판의 진동 지배 방정식에 고정단 경계 조건을 적용하면, 고정단 평판의 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{plate}^N(\Lambda)$ 을 추출할 수 있다. 여기서 위 첨자 N 은 정사각 시스템 행렬의 크기, Λ 는 주파수 파라미터를 의미한다⁽¹⁾.

고정단 평판의 고유치는 시스템 행렬의 판별식이 0이 되게 하는 주파수 파라미터에 해당되므로, 식 (1)로부터 구할 수 있다.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}^N(\Lambda))=0 \tag{1}$$

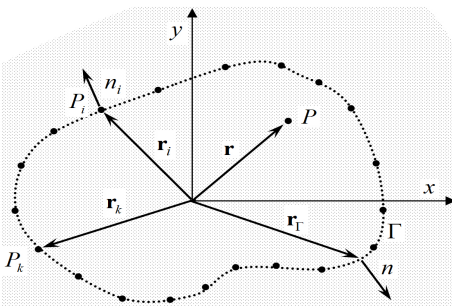


Fig. 1 Arbitrarily shaped clamped plate whose boundary Γ is discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N .

식 (1)을 이용할 경우, 노드 수가 증가하면 저주파수 고유치가 구해지지 않는 문제점이 존재한다⁽⁴⁾.

2.2 논문 1부에서 제안된 개선된 NDIF법

논문 1부에서 새로이 제안된 방법을 이용하면, 크기가 $2N$ 인 시스템 행렬 \mathbf{SM}_{plate}^{2N} 을 추출할 수 있다. 고정단 평판의 고유치는 시스템 행렬의 판별식의 해, 즉 식 (2)의 해에 해당된다⁽⁴⁾.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda))=0 \tag{2}$$

식 (2)의 판별식 값은 일반적으로 식 (3)에 의해 계산된다.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda))=\prod_{i=1}^{2N}\lambda_i(\Lambda) \tag{3}$$

여기서 $\lambda_i(\Lambda)$ 는 $\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda)$ 에 대한 대수 고유치 문제(algebraic eigenvalue problem) 식인 식 (4)에서 i 번째 고유치를 의미한다.

$$\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda)\mathbf{v}_i=\lambda_i(\Lambda)\mathbf{v}_i \tag{4}$$

여기서 \mathbf{v}_i 는 i 번째 고유벡터를 의미한다.

한편, 식 (3)을 이용하더라도 노드 수가 증가하면 저주파수 영역에서 고유치가 구해지지 않음이 확인되었다⁽⁴⁾. 그래서 식 (3) 대신에 식 (5)가 논문 1부에서 제안되었다.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda))=\prod_{i=1}^{R(\Lambda)}\lambda_i(\Lambda) \tag{5}$$

여기서 $R(\Lambda)$ 은 주파수 파라미터 Λ 의 함수로 주어지는 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda)$ 의 랭크 함수이다.

식 (5)를 사용할 경우 저주파수 영역에서 고유치가 정확히 구해짐이 확인되었다⁽⁴⁾. 그러나 시스템 행렬의 랭크가 불연속적으로 변하는 지점들이 많아 질 경우, 고유치 식별이 어려운 문제점이 발생하였다. 이 문제점을 개선하기 위해, 랭크의 변화에 의해 추가로 곱해지는 고유치들의 곱들을 식 (5)의 판별식에서 나누어 주는 방안인 식 (6)이 제안되었다⁽⁴⁾.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}^{2N}(\Lambda))=\prod_{i=1}^{R(\Lambda)}\lambda_i(\Lambda)\div\prod\lambda_{add}(\Lambda) \tag{6}$$

3. 예제 연구

3.1 직사각형 고정단 평판

Fig. 2는 엄밀해가 존재하지 않는 고정단 직사각형 평판(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)을 보여준다. 먼저 Fig. 2(a)와 같이 평판의 경계를 20개의 노드로 이산화하고, 코너 노드에서의 법선 벡터는 양쪽 변의 두 법선 벡터의 평균으로 구해진다. 20개 노드로 이산화 된 평판에 대해 기존 NDIF법의 식 (1)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 3의 실선과 같다. 이 실선 곡선에서 6개 고유치들($p_1 \sim p_6$)이 추출되었음을 확인할 수 있다. 이들 고유치들은 Table 1의 두번째 열에 요약되었으며, FEM(ANSYS)에 의해 구한 고유치들과 0.11% 이내의 적은 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 참고로 $m_1 \sim m_9$ 는 허위 고유치(spurious eigenvalue)를 의미

하며, 본 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인 고유치와 일치한다⁽¹⁾.

Fig. 2(b)와 같이 노드의 개수를 28개로 늘인 후 기존 NDIF법의 식 (1)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 3의 점선과 같다. 이 점선 곡선을 살펴보면, 저주파수 영역에서 판별식 값이 발산하여 단지 4개의 고유치($p_3 \sim p_6$)만이 추출되는 문제점을 확인할 수 있으며, 이 결과는 Table 1의 3열에 요약되었다. 한편,

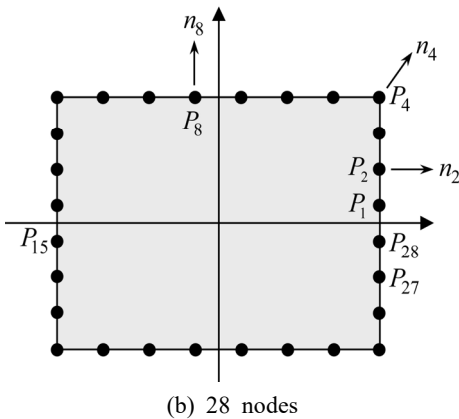
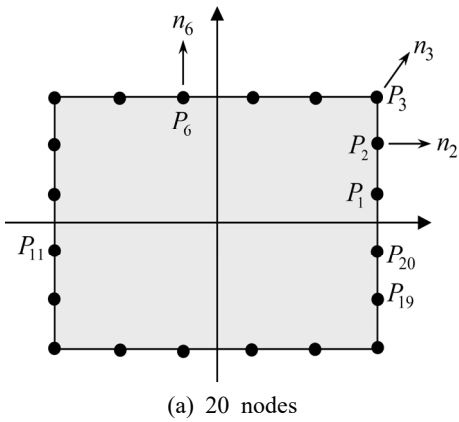


Fig. 2 Rectangular clamped plates discretized with 20 and 28 nodes, respectively

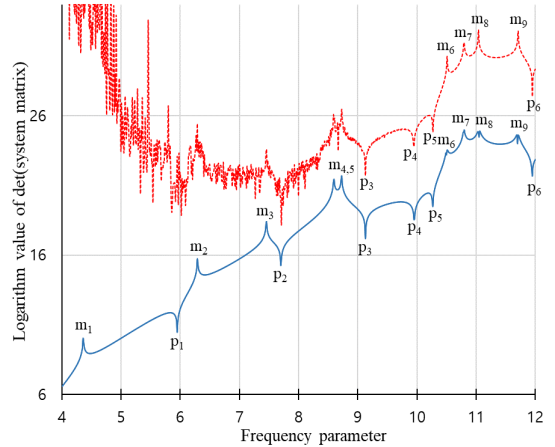


Fig. 3 Determinant curves for the rectangular clamped plates by the original NDIF method using Eq. (1) (dotted line: 20 nodes, solid line: 28 nodes)

Table 1 Eigenvalues of the rectangular clamped plate by the original NDIF method, the proposed method, and FEM(ANSYS) (parenthesized values denote errors[%] with respect to FEM results)

	Original NDIF method (20 nodes)	Original NDIF method (28 nodes)	Proposed method (28 nodes)	FEM (ANSYS) (961 nodes)
p1	5.952 (0.03)	None	5.952 (0.03)	5.950
p2	7.703 (0.04)	None	7.710 (0.)	7.706
p3	9.131 (0.09)	9.131 (0.09)	9.132 (0.09)	9.123
p4	9.955 (0.11)	9.947 (0.01)	9.947 (0.01)	9.948
p5	10.27 (0.10)	10.27 (0.10)	10.28 (0.19)	10.26
p6	11.95 (0.08)	11.95 (0.08)	11.95 (0.08)	11.94

28개의 노드를 사용한 경우에 대한 시스템 행렬의 랭크 함수 $R(\lambda)$ 를 구해 보면 Fig. 4와 같다. 시스템 행렬의 풀 랭크(full rank) 값은 56인데, 랭크 함수 곡선의 저주파수 영역을 살펴 보면 랭크 값이 56보다 훨씬 작은 값을 가짐을 알 수 있다. 이러한 이유로 인해 Fig. 3의 점선에서 저주파수 고유치가 추출되지 않는다는 것을 논문 1부에서 이미 설명하였다.

상기의 문제점을 개선하기 위해 논문 1부에서 제안한 식 (5)를 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 5의

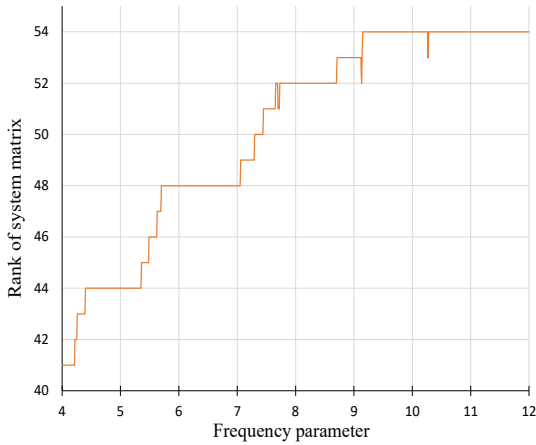


Fig. 4 Rank function $R(\lambda)$ of the rectangular clamped plate discretized with 28 nodes

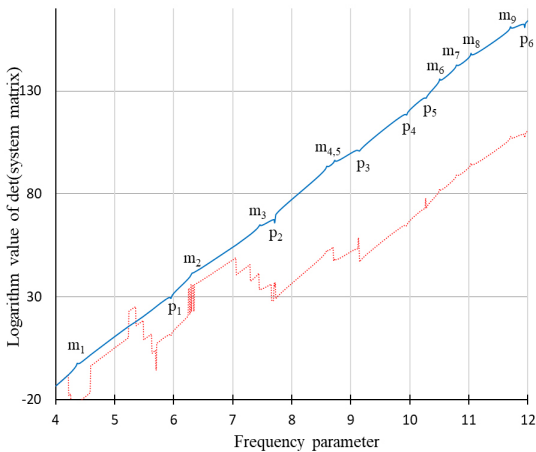


Fig. 5 Determinant curves for the rectangular clamped plate with 28 nodes obtained by the proposed method (dotted and solid lines use Eq. (5) and Eq. (6), respectively)

점선과 같으며, 식 (5)의 계산에 필요한 시스템 행렬의 랭크 $R(\lambda)$ 은 앞의 Fig. 4에 의해 주어진다. Fig. 5의 점선 곡선을 살펴보면, 시스템 행렬의 랭크 변화에 의해 발생한 불연속 지점들과 평판의 고유치에 해당하는 골(crest)들이 서로 겹쳐 있어서, 고유치 식별이 어려운 상황임을 알 수 있다. 그래서, 랭크 변화에 의한 불연속 지점들을 제거하기 위해 제안된 식 (6)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 5의 실선과 같이 된다. 이 실선 곡선을 살펴보면, 평판의 6개 고유치들 ($p_1 \sim p_6$)이 정확히 추출되었음을 확인할 수 있다. 이들 고유치들은 Table 1의 네번째 열에 요약되었으며, 다섯번째 열의 FEM(ANSYS) 해석 결과와 비교해볼 때 거의 정확히 일치함도 확인할 가능하다. FEM 해석은 961개의 많은 노드를 사용한 반면에, 제안된 방법은 단지 28개의 노드를 사용했다는 점을 고려하면, 제안된 방법은 FEM 보다 수치 계산량에 있어서 더 효율적인 방법이라 말할 수 있다.

Fig. 6은 논문 1부의 식 (7)과 식 (33)을 사용하여 제안된 방법에 의해 추출된 고정단 사각 평판의 고유모드를 보여준다. 이들 모드들은 Fig. 2(b)와 같이 단지 28개의 노드만이 사용되었지만 FEM(ANSYS)으로 구한 모드들과 노달 라인과 형상이 정확히 일치함

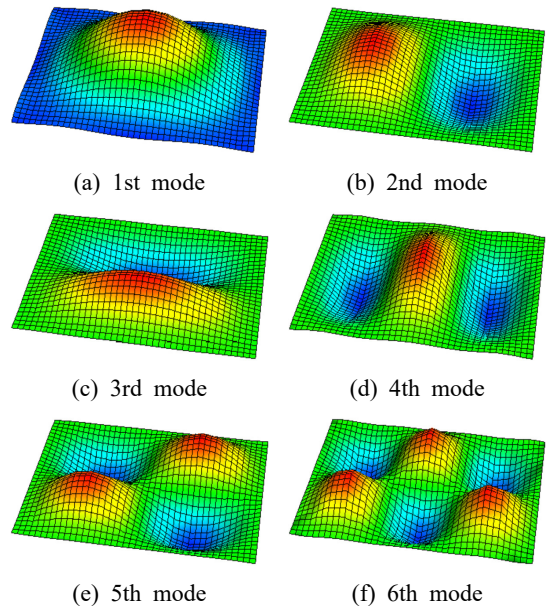


Fig. 6 Mode shapes of the rectangular clamped plate obtained by the proposed method using Fig. 2(b)

이 확인되었다. 참고로 지면 관계 상 FEM(ANSYS)으로 구한 모드들은 제시하지 않았다.

3.2 임의의 형상 고정단 평판

Fig. 7은 반원과 2개의 선분으로 구성된 임의의 형상 고정단 평판을 보여준다. 먼저 Fig. 7(a)와 같이 평판의 경계를 20개의 노드로 이산화 후, 기존 NDIF법의 식 (1)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 8의 실선과 같다. 이 실선 곡선에서 6개 고유치들($p_1 \sim p_6$)이 추출되었음을 확인할 수 있다. 참고로 피크 $m_1 \sim m_6$ 은 멤브레인 고유치(허위 고유치)에 해당된다. 위에서 추출한 평판 고유치 $p_1 \sim p_6$ 은 Table 2의 두번째 열에 요약되었으며, FEM(ANSYS)에 의해 구한 고유치들과 0.17% 이내의 적은 오차로 가짐을 확인할 수 있다. 참고로 $m_1 \sim m_6$ 는 허위 고유치를 의미하며 멤브레인 고유치와 일치한다⁽¹⁾.

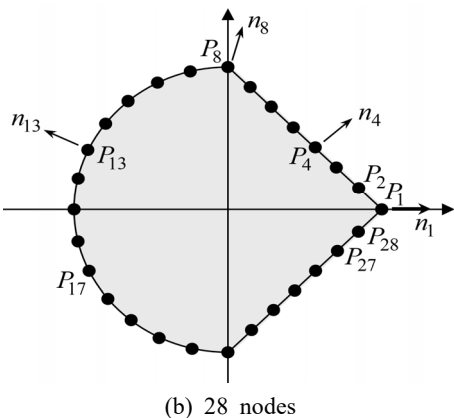
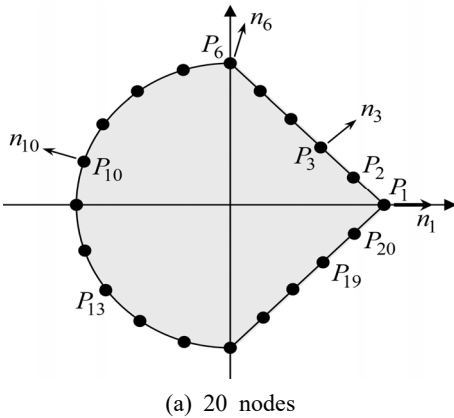


Fig. 7 Arbitrarily shaped clamped plates discretized with 20 and 28 nodes, respectively

Fig. 7(b)와 같이 노드의 개수를 28개로 늘인 후 기존 NDIF법의 식 (1)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 8의 점선 곡선과 같다. 이 판별식 곡선의 저주파수 영역에서 판별식 값이 발산하여 단지 여섯번째 고유치(p_6)만이 추출되는 문제점을 확인할 수 있으며, 이 결과는 Table 2의 세번째 열에 요약되었다.

상기의 문제점을 개선하기 위해 논문 1부에서 제안

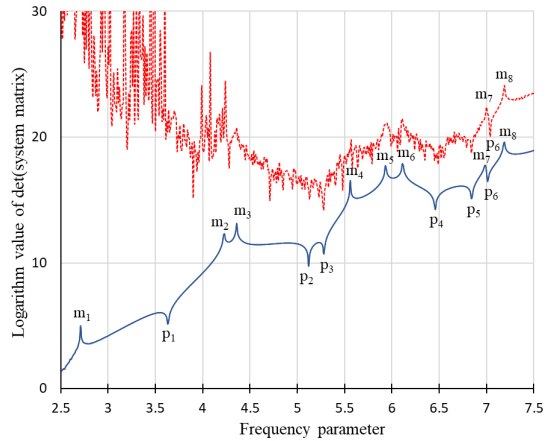


Fig. 8 Determinant curves for the arbitrarily shaped clamped plates by the original NDIF method using Eq. (1) (dotted line: 20 nodes, solid line: 28 nodes)

Table 2 Eigenvalues of the arbitrarily shaped clamped plate by the original NDIF method, the proposed method, and FEM(ANSYS) (parenthesized values denote errors[%] with respect to FEM results)

	Original NDIF method (20 nodes)	Original NDIF method (28 nodes)	Proposed method (28 nodes)	FEM (ANSYS) (961 nodes)
p1	3.634 (0.03)	None	3.634 (0.03)	3.633
p2	5.121 (0.04)	None	5.122 (0.06)	5.119
p3	5.283 (0.09)	None	5.283 (0.09)	5.279
p4	6.457 (0.16)	None	6.453 (0.06)	6.447
p5	6.844 (0.10)	None	6.842 (0.07)	6.837
p6	7.014 (0.08)	7.040 (0.17)	7.040 (0.17)	7.028

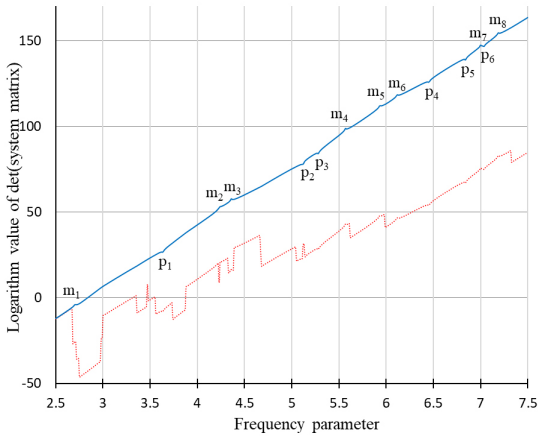


Fig. 9 Determinant curves for the arbitrarily shaped clamped plate with 28 nodes obtained by the proposed method (dotted and solid lines use Eq. (5) and Eq. (6), respectively)

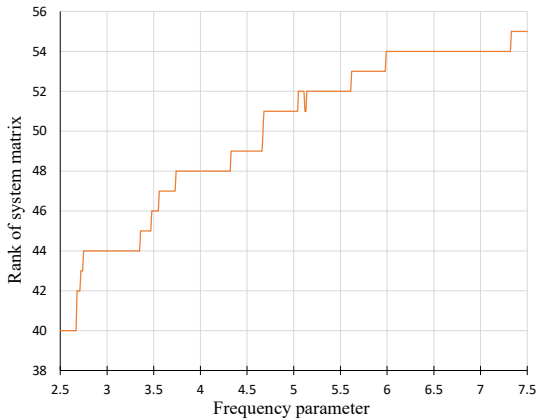


Fig. 10 Rank function $R(A)$ of the arbitrarily shaped clamped plate discretized with 28 nodes

한 식 (5)를 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 9의 점선과 같다. 그리고 식 (5)를 계산하기 위해 사용된 시스템 행렬의 랭크 $R(A)$ 은 Fig. 10과 같이 구해졌다. Fig. 9 점선 곡선을 살펴보면, 이전 예제와 마찬가지로 행렬의 랭크 변화에 의해 발생한 불연속 지점들과 평판의 고유치에 해당하는 골(crest)들이 서로 겹쳐 있어서, 고유치 식별이 어려운 상황임을 알 수 있다. 그래서, 랭크 변화에 의한 불연속 지점들을 제거하기 위해 제안된 식 (6)을 이용하여 판별식 곡선을 그리면 Fig. 9 실선과 같이 된다. 이 실선 곡선을 살펴보면, 평판의 6개 고유치들($p_1 \sim p_6$)이 정확히 추출

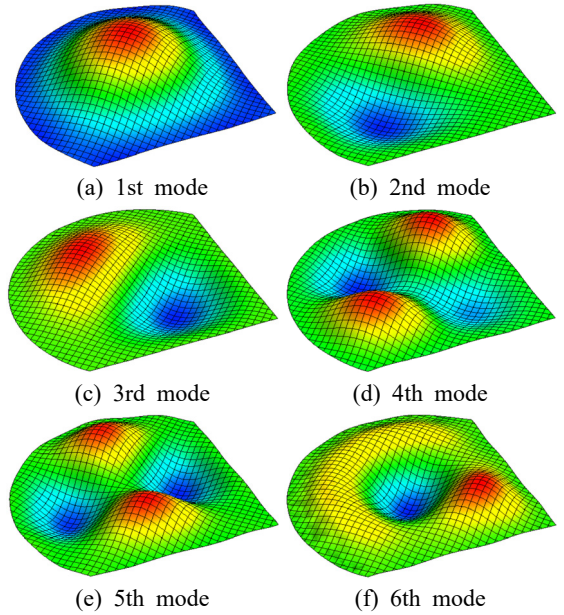


Fig. 11 Mode shapes of the arbitrarily shaped clamped plate obtained by the proposed method using Fig. 7(b)

되었음을 확인할 수 있다. 이들 고유치들은 Table 2 네번째 열에 요약되었으며, 네번째 열의 FEM(ANSYS) 해석 결과와 비교해볼 때 거의 정확히 일치함도 확인 가능하다. FEM 해석은 961개의 많은 노드를 사용한 반면에 제안된 방법은 단지 28개의 노드를 사용했다는 측면에서, 제안된 방법은 FEM 보다 수치 계산량에 있어서 더 효율적인 방법이라 말할 수 있다.

Fig. 11은 제안된 방법(논문 1부의 식 (7)과 식 (33)을 사용)에 의해 추출된 고정단 임의의 형상 평판의 고유 모드들을 보여준다. 이들 모드들은 FEM(ANSYS)로 구한 모드들과 노달 라인과 형상이 정확히 일치함이 확인되었다.

4. 결 론

이 논문의 1부에서는, NDIF법을 이용한 고정단 평판 고유치 해석에서 노드의 수를 증가하면 저주파수 고유치들이 추출되지 않는 원인 규명과 이를 개선하기 위한 새로운 방법이 제안되었다. 이 논문의 2부에서는 제안된 방법의 타당성과 정확성을 증명하기 위해, 엄밀해가 존재하지 않은 두 가지 형상의 고정단 평판에 대한 예제 검증 및 분석이 수행되었다. 이 예

제 검증을 통해, 제안된 방법은 NDIF법에서 고차 고유치를 구하기 위해 노드 수를 증가시키더라도 모든 주파수 영역에서 고유치와 고유 모드를 정확히 추출할 수 있음이 확인되었다.

후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원 과제임.

References

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No, 1, pp. 9~26.

(2) Bathe, K.-J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-hall, NJ, United States.

(3) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer-verlag, NY, United States.

(4) Kang, S. W., 2023, Development of NDIF Method for Extraction of Eigenvalues in the Entire Frequency Range of Clamped Plates: Part 1(Theoretical Formulation and Verification), *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 33, No. 6, pp. 699~705.



Sang Wook Kang received a B.S., M.S. and Ph.D. degrees in Dept. of Mechanical Design Engineering from Seoul National University. He is working in Hansung University