

# 오목 멤브레인의 저차 고유치 미 추출 문제 극복을 위한 분할 영역법 기반 무차원동영향함수법 개발: 제1부(이론 정립과 검증)

## Development of the NDIF Method based on the Sub-domain Method Overcoming the Non-extraction Problem of Low-order Eigenvalues for Concave Membranes: Part 1(Theoretical Formulation and Verification)

강 상 옥<sup>†</sup>

Sang Wook Kang<sup>†</sup>

(Received September 26, 2024 ; Revised October 28, 2024 ; Accepted October 28, 2024)

**Key Words :** NDIF Method(무차원동영향함수법), Concave Membrane(오목 멤브레인), Eigenvalue(고유치), Free Vibration(자유 진동), Determinant Curve(판별식 곡선), Sub-domain Method(영역 분할법)

### ABSTRACT

The NDIF method, developed by the author, exhibits a significant limitation in that low-order eigenvalues cannot be accurately obtained as the number of nodes increases. Recent studies on membranes, acoustic cavities, and plates have introduced an ‘improved NDIF method’ that addresses this issue; however, further research is required to determine whether this method is applicable to concavely shaped membranes, which necessitate the use of the sub-domain method to divide the concave domain into several convex domains. In this paper, it is demonstrated that the aforementioned ‘improved NDIF method’ is not valid for concave membranes. A new NDIF method, specifically designed to be effective for concave membranes, is proposed. This new method was developed by first identifying the reasons for the invalidity of the improved NDIF method and then reconstructing the system matrix without reduction. To verify the accuracy and validity of the proposed method, example studies were conducted on a rectangular membrane with exact solutions and an arbitrarily shaped membrane featuring a deep groove.

### 1. 서 론

저자는 임의의 형상 오목 멤브레인의 고정밀도 고유치 추출이 가능한 무차원동영향함수법(non-dimensional dynamic influence function method)을 처음 개발하였다<sup>(1)</sup>. 일반적으로 무차원동영향함수법은 볼록 형상의 멤브레인이나 평판에 적용 가능하나, 상기

의 연구에서<sup>(1)</sup> 오목 영역을 여러 개의 볼록 영역으로 분할하는 영역 분할법(sub-domain method) 기반 무차원동영향함수법을 제안하였다.

무차원동영향함수법은 유한요소법(FEM)<sup>(2)</sup>이나 경계요소법(BEM)에 비해<sup>(3)</sup> 수치 계산량이 월등히 적어서 고정밀도 해석 결과를 제공하는 장점을 가진다. 무차원동영향함수법은 유한요소법과는 차별적으로 해석 대상물의 경계만을 절점(node)으로 이산화하며,

<sup>†</sup> Corresponding Author ; Member, Hansung University, Professor  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Chan Jung Kim  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

절점들 사이에는 보간 함수를 사용하지 않는 특징을 가진다. 이러한 특징 덕분에 고정밀도 해석 능력을 가지게 된다. 그러나 고차 고유치에 대한 해석 정밀도를 높이기 위해 절점의 수를 증가시키면 저차 고유치가 추출되지 않은 약점이 존재한다. 이러한 약점은 볼록 형상을 가진 멤브레인<sup>(4,5)</sup>, 음향 공동<sup>(6)</sup>, 평판에<sup>(7)</sup> 대한 최근의 무차원동영향함수법 연구에서 극복되어졌다.

오목 형상 멤브레인에 대한 무차원동영향함수법은 분할 영역법을 이용하기 때문에, 볼록 형상 멤브레인에 대한 무차원동영향함수법에 비해 이론적으로 복잡하고 차별적인 부분이 많다. 더 나아가 볼록 멤브레인에서 발생하는 저차 고유치 미 추출 문제를 극복한 최근 연구 결과는<sup>(4)</sup> 오목 멤브레인은 유효하지 않음 이 이 연구의 사전 연구에서 확인되었다.

이 논문에서는 엄밀해가 존재하는 사각 멤브레인에 영역 분할법 기반 무차원동영향함수법을 적용하여, 절점 수가 증가했을 때 저차의 고유치들이 구해지지 않은 원인을 먼저 규명하였다. 이를 바탕으로 절점 수와 무관하게 저차의 고유치가 정확하게 추출되게 하는 ‘새로운 분할 영역법 기반 무차원동영향함수법’이 제안되었다.

이 논문에서는 제안된 이론을 검증하기 위해 사각형 멤브레인 뿐만 아니라 깊은 홈을 가진 오목 멤브레인에 대한 예제 검증을 수행하였다. 향후 추가 논문에서는 두 영역 분할법(two-domain method)과 다영역 분할법(multi-domain method)을 이용하여, 다양한 형상을 가진 오목 멤브레인과 내부에 구멍이 있는 멤브레인에 대한 예제 연구가 수행될 예정이다.

## 2. 영역 분할법 기반 무차원동영향함수법 이론

### 2.1 두 영역 분할법(Two-domain Method)

오목 형상 멤브레인의 고정밀도 고유치 해석을 위해 개발된 영역 분할법 기반 무차원동영향함수법은 Fig. 1과 같이 오목 형상 멤브레인을 여러 개의 볼록 형상 영역으로 분할하는 데서 출발한다. 이 논문에서는 오목 멤브레인을 2개의 영역  $D_I$ 과  $D_{II}$ 로 분할한 두 영역 분할법만을 다루며, 3개 이상의 영역으로 분할하는 다영역 분할법(multi-domain method)은 이 논문의 2부에서 고려된다.

Fig. 1과 같이 볼록 영역  $D_I$ 는 외부 경계  $\Gamma_1$ 과  $D_{II}$

와의 접경  $\Gamma_c$ 로 둘러싸여 있다. 경계  $\Gamma_1$ 은  $N_1$ 개의 절점  $P_1^{(I)}, P_2^{(I)}, \dots, P_{N_1}^{(I)}$ 로 이산화되고, 경계  $\Gamma_c$ 는  $N_c$ 개의 절점  $P_1^{(C)}, P_2^{(C)}, \dots, P_{N_c}^{(C)}$ 로 이산화된다. 볼록 영역  $D_{II}$ 는 외부 경계  $\Gamma_2$ 와 접경  $\Gamma_c$ 로 둘러싸여 있으며 외부 경계  $\Gamma_2$ 는  $N_2$ 개의 절점  $P_1^{(II)}, P_2^{(II)}, \dots, P_{N_2}^{(II)}$ 로 이산화된다.

### 2.2 분할된 영역 내부 변위 가정

영역  $D_I$ 의 내부 변위  $W_I(\mathbf{r})$ 는 경계  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_c$  상의 절점에서 정의된 무차원 동영향 함수들의 선형결합<sup>(1)</sup>으로 식 (1)과 같이 가정한다.

$$W_I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_1} A_i^{(1)} J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^{(1)}|) + \sum_{k=1}^{N_c} A_k^{(c)} J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(c)}|) \tag{1}$$

여기서  $\Lambda$ 는 주파수 파라미터,  $\mathbf{r}$ 은 영역  $D_I$ 에 위치한 한 점에 대한 위치 벡터를 의미하며,  $J_0(\dots)$ 는 제1종 0차 베셀함수(Bessel function)로 주어지는 멤브레인의 무차원 동영향 함수이다. 그리고  $\mathbf{r}_i^{(1)}$ 와  $\mathbf{r}_k^{(c)}$ 는 경계  $\Gamma_1$ 에 위치한  $i$ 번째 절점에 대한 위치벡터와 접경  $\Gamma_c$ 에 위치한  $k$ 번째 절점에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다. 또한,  $A_i^{(1)}$ 와  $A_k^{(c)}$ 는 경계  $\Gamma_1$ 에 위치한  $i$ 번째 절점에 정의된 베셀 함수  $J_0$ 의 기여도와 접경  $\Gamma_c$ 에 위치한  $k$ 번째 절점에 정의된 베셀 함수  $J_0$ 의 기여도를 각각 의미한다.

영역  $D_I$ 과 마찬가지로, 영역  $D_{II}$ 의 내부 변위  $W_{II}(\mathbf{r})$ 는 경계  $\Gamma_2$ 와  $\Gamma_c$  상의 절점에서 정의된 무차원 동영향 함수들의 선형결합<sup>(1)</sup>으로 식 (2)와 같이 가정한다.

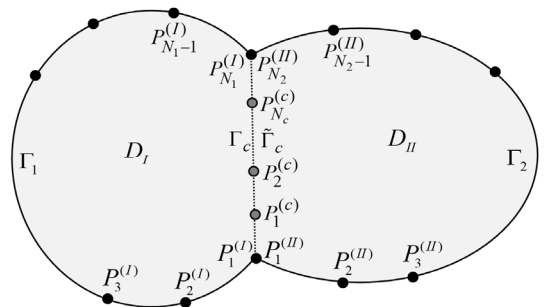


Fig. 1 Concave membrane divided into two domains  $D_I$  and  $D_{II}$

$$W_{II}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_j} B_j^{(2)} J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{(2)}|) + \sum_{k=1}^{N_c} B_k^{(c)} J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(c)}|) \tag{2}$$

여기서  $\mathbf{r}$ 은 영역  $D_{II}$ 에 위치한 한 점에 대한 위치 벡터를 의미한다. 그리고  $\mathbf{r}_j^{(2)}$ 는 경계  $\Gamma_2$ 에 위치한  $j$ 번째 절점에 대한 위치벡터를 나타낸다. 또한,  $B_j^{(2)}$ 와  $B_k^{(c)}$ 는 경계  $\Gamma_2$ 에 위치한  $j$ 번째 절점에 정의된 베셀 함수  $J_0$ 의 기여도와 접경  $\Gamma_c$ 에 위치한  $k$ 번째 절점에 정의된 베셀 함수  $J_0$ 의 기여도를 각각 의미한다.

### 2.3 글로벌 시스템 행렬식 구성

해석 대상 멤브레인이 고정단 경계(fixed boundary)를 가지므로, 외부 경계  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 에서 변위가 0인 경계 조건을 고려하면 식(3), 식(4)와 같은 로컬 시스템 행렬식을 각각 얻을 수 있다<sup>(1)</sup>.

$$\mathbf{SM}_{11} \mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{1c} \mathbf{A}_c = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{SM}_{22} \mathbf{B}_2 + \mathbf{SM}_{2c} \mathbf{B}_c = 0 \tag{4}$$

여기서 시스템 행렬  $\mathbf{SM}_{11}$ ,  $\mathbf{SM}_{1c}$ ,  $\mathbf{SM}_{22}$ ,  $\mathbf{SM}_{2c}$ 와 벡터  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{B}_c$ 의 성분은 이전 논문에서<sup>(1)</sup> 확인 가능하기에 지면 관계상 설명을 생략한다.

다음으로 접경  $\Gamma_c$ 에서의 변위와 기울기 연속 조건을 고려하면 식(5)와 식(6)과 같은 로컬 시스템 행렬식을 각각 얻을 수 있다<sup>(1)</sup>.

$$\mathbf{SM}_{c1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{cc} \mathbf{A}_c = \mathbf{SM}_{c2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{SM}_{cc} \mathbf{B}_c \tag{5}$$

$$\mathbf{SM}_{c1}^{(n)} \mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{cc}^{(n)} \mathbf{A}_c = \mathbf{SM}_{c2}^{(n)} \mathbf{B}_2 + \mathbf{SM}_{cc}^{(n)} \mathbf{B}_c \tag{6}$$

여기서 시스템 행렬들의 성분은 이전 논문에서 확인 가능하다<sup>(1)</sup>.

4개의 로컬 시스템 행렬식 식(3)~식(6)으로부터 하나의 글로벌 시스템 행렬식을 추출하기 위해, 우선 식(3)과 식(4)를 식(7) 및 식(8)과 같이 각각 변형한다.

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{SM}_{11}^{-1} \mathbf{SM}_{1c} \mathbf{A}_c \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mathbf{SM}_{22}^{-1} \mathbf{SM}_{2c} \tilde{\mathbf{A}}_c \tag{8}$$

식(7)과 식(8)을 식(5)와 식(6)에 대입하면

식(9)와 같은 하나의 글로벌 시스템 행렬식이 구해진다.

$$\mathbf{SM}(\Lambda) \mathbf{C} = 0 \tag{9}$$

여기서 주파수 파라미터  $\Lambda$ 의 함수인 글로벌 시스템 행렬  $\mathbf{SM}(\Lambda)$ 와 기여도 벡터  $\mathbf{C}$ 는 식(10) 및 식(11)과 같다.

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_{c1} - \mathbf{SM}_{c1} \mathbf{SM}_{11}^{-1} \mathbf{SM}_{1c} & \mathbf{SM}_{c2} \mathbf{SM}_{22}^{-1} \mathbf{SM}_{2c} - \mathbf{SM}_{cc} \\ \mathbf{SM}_{c1}^{(n)} - \mathbf{SM}_{c1}^{(n)} \mathbf{SM}_{11}^{-1} \mathbf{SM}_{1c} & \mathbf{SM}_{c2}^{(n)} \mathbf{SM}_{22}^{-1} \mathbf{SM}_{2c} - \mathbf{SM}_{cc}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{A}_c \ \mathbf{B}_c\}^T \tag{11}$$

식(9)로부터 멤브레인의 고유치는 글로벌 시스템 행렬의 판별식이 0이 되는 조건 식(12)로부터 구할 수 있다.

$$\det(\mathbf{SM}(\Lambda)) = 0 \tag{12}$$

## 3. 저차고유치 미 추출 문제 해결 방안

### 3.1 저차 고유치 미 추출 문제 규명

이전 연구에서 무차원동영향함수법은 절점이 증가하면 저차 고유치들이 미 추출되는 현상이 확인되었다<sup>(4-6)</sup>. 이러한 현상이 분할영역법 기반 무차원동영향 함수법에도 나타나는 지 확인하고 그 해결책을 찾기 위해 엄밀해가 존재하는 직사각형 멤브레인(가로 1.2m, 세로 0.9 m)을 Fig. 2와 같이 두 개의 영역  $D_I$ 과  $D_{II}$ 로 분할하였다. Fig. 2(a)는 외부 경계에 24개 절점과 접경에 3개 절점으로 총 27개 절점으로 이산화한 경우이다. Fig. 2(b)는 외부 경계에 36개 절점과 접경에 5개 절점으로 총 41개 절점으로 이산화한 경우이다.

Fig. 3의 실선은 27개 절점으로 이산화한 멤브레인(Fig. 2(a))에 대한 판별식 곡선을 식(13)을 이용하여 그린 결과이다<sup>(4)</sup>.

$$\det(\mathbf{SM}(\Lambda)) = \prod_{k=1}^S \gamma_k(\Lambda) \tag{13}$$

여기서  $S$ 는 시스템 행렬  $\mathbf{SM}(\Lambda)$ 의 크기이며 접경 절점 개수의 두 배인  $S=6$ 이며,  $\gamma_k(\Lambda)$ 는 시스템 행렬  $\mathbf{SM}(\Lambda)$ 에 대한 대수 고유치 문제에서의  $k$ 번째 고유치를 의미한다<sup>(4)</sup>. 이 곡선에서 극소값에 해당되는 주파수 파라미터 값들이 고유치에 해당된다. 이 고유치들은 Table 1에 정리되었다. 이 고유치들을 엄밀해(exact solution)와 비교해보면, 저차(1차~5차) 고

유치들은 정확히 일치하나 고차(6차, 7차) 고유치들이 약간의 오차가 있음이 보인다. 그래서 Fig. 2(b)와 같이 절점 수를 27개에서 41개로 증가시킨 후 식 (13)을 이용하여 판별식 곡선을 그렸으며 그 결과는 Fig. 3의 점선 곡선에 해당된다. 이때 시스템 행렬의 크기는 절점 절점 개수의 두 배인  $S=10$ 이다. 점선 판별식 곡선을 살펴 보면, 저주파수 영역에서는 시스템 행렬이 발산하여 저차(1차~3차)의 고유치가 추출되지 않고, 고차(4차~7차) 고유치만이 추출되었음을 알 수 있다. 점선 판별식 곡선으로부터 추출한 고유치들은 Table 1에 요약되었다. 절점 수가 증가했기 때문에 고차(6차, 7차) 고유치들이 엄밀해와 정확히 일치했음을 Table 1에서 확인 가능하다<sup>(7)</sup>. 그러나 저차(1차~3차) 고유치들이 추출되지 않는 문제점이 발견된다.

### 3.2 저차 고유치 미 추출 문제 해결 방안

Fig. 3의 점선 판별식 곡선에서 저차 고유치가 추출되지 않는 이유는 절점 절점 수가 증가하여 저주파수 영역에서 시스템 행렬이 발산(기저함수가 서로 독립적이지 않기 때문에 발산)하기 때문인 것으로 추정되

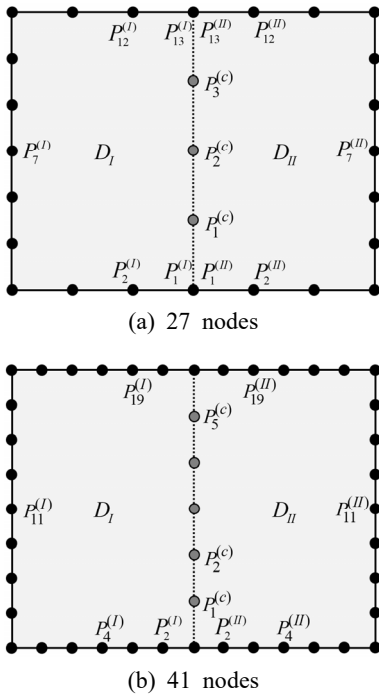


Fig. 2 Rectangular membranes divided into two domains and discretized with 27 and 41 nodes, respectively

며, 이러한 발산 현상 때문에 시스템 행렬의 판별식 값이 왜곡되어 계산되게 된다<sup>(4)</sup>. 시스템 행렬의 판별식 값을 정확히 구하기 위해서는 시스템 행렬의 랭크(rank)를 이용하는 식 (14)와 같은 판별식 값 계산 방법이 필요하다<sup>(4-6)</sup>.

$$\det(\mathbf{SM}(\Lambda)) = \prod_{k=1}^{R(\Lambda)} \lambda_k(\Lambda) \tag{14}$$

여기서  $R(\Lambda)$ 는 시스템 행렬의 랭크이다. 41개 절점으로 이산화한 경우에 대한 시스템 행렬의 랭크  $R(\Lambda)$ 을 주파수 파라미터  $\Lambda$ 의 함수로 Fig. 4와 같이 계산하였다. Fig. 4를 살펴보면, 시스템 행렬의 랭크

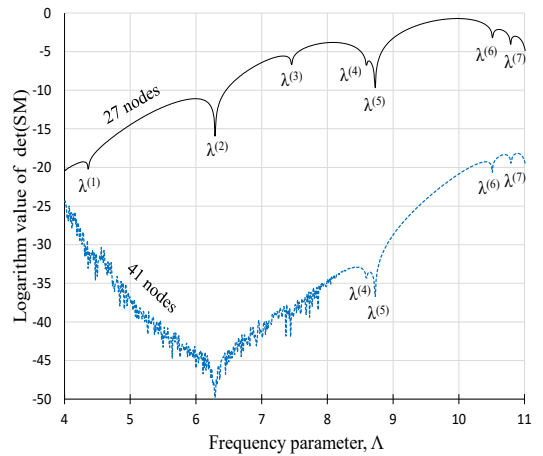


Fig. 3 Determinant curves of the rectangular membrane for 27 and 41 nodes plotted by the previous NDIF method using Eq. (13) or Eq. (14)

Table 1 Eigenvalues of the rectangular membrane obtained by the previous NDIF method using Eq. (13) or Eq. (14), the exact solution and FEM(ANSYS)

	Previous NDIF method		Exact solution	FEM (1089 nodes)
	27 nodes	41 nodes		
$\lambda^{(1)}$	4.363	None	4.363	4.365
$\lambda^{(2)}$	6.293	None	6.293	6.301
$\lambda^{(3)}$	7.456	None	7.456	7.467
$\lambda^{(4)}$	8.595	8.595	8.595	8.621
$\lambda^{(5)}$	8.727	8.727	8.727	8.741
$\lambda^{(6)}$	10.514	10.508	10.508	10.537
$\lambda^{(7)}$	10.787	10.794	10.794	10.831

의 크기가 전체 주파수 대역에서 10으로 시스템 행렬의 크기와 같은 일정한 값을 가진다. 즉,  $R(\Lambda) = S$ 가 성립하여 식(14)가 식(13)과 같아지게 되어 식(14)의 유효성이 사라지게 된다. 결과적으로, 식(14)를 이용하여 판별식 곡선을 그리더라도 Fig. 3의 곡선과 같은 결과가 나오는 문제점이 발생하게 된다.

$R(\Lambda) = S$ 이 된 이유를 알아 내기 위해 식(10)으로 주어진 글로벌 시스템 행렬의 성분을 살펴보고자 한다. 분할영역법을 사용하지 않은 이전 연구에서 식(10)의 성분에 포함된  $SM_{11}$ 과  $SM_{22}$ 발산이 시스템 행렬의 랭크를 시스템 행렬의 크기보다 작게 만드는 원인으로 분석되었다. 그런데 식(10)에서는  $SM_{11}$ 과  $SM_{22}$ 가 역행렬의 형태인  $SM_{11}^{-1}$ 과  $SM_{22}^{-1}$ 로 변환되었기 때문에 글로벌 시스템 행렬이 발산하지 않아  $R(\Lambda) = S$ 이 된 것으로 분석된다. 그래서 이 논문에서는  $SM_{11}$ 과  $SM_{22}$ 이 역행렬 변환없이 시스템 행렬의 성분에 그대로 포함되도록 새로운 방식의 글로벌 시스템 행렬 추출 방안을 제안한다

$SM_{11}^{-1}$ 과  $SM_{22}^{-1}$ 은 식(7), 식(8)과 같이 미지 기여도 벡터  $A_1$ 과  $A_2$ 를 소거하여 시스템 행렬을 축약하는 과정에서 생성되므로, 축약 과정 없이 글로벌 시스템 행렬을 추출하고자 한다. 4개의 로컬 시스템 행렬식 식(3)~식(6)은 식(15)와 같이 하나의 행렬식으로 표현이 가능하다.

$$TM(\Lambda)D = 0 \tag{15}$$

여기서  $TM(\Lambda)$ 와  $D$ 는 새로이 추출된 시스템 행렬과 기여도 벡터로 식(16) 및 식(17)과 같이 각각 구해진다.

$$TM = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{1a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & SM_{22} & SM_{2a} \\ SM_{a1} & SM_{aa} & -SM_{a2} & -SM_{aa} \\ VM_{a1} & VM_{aa} & -VM_{a2} & -VM_{aa} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$D = \{A_1 \ A_a \ B_2 \ B_a\}^T \tag{17}$$

여기서  $TM(\Lambda)$ 의 크기는  $S = 48$ 이다. 왜냐하면 Fig. 2(b)에서와 같이 영역  $D_I$ 과  $D_{II}$ 를 둘러싸고 있는 절점 수가 둘 다 24개이고 이 두 값의 합에 해당되는 값인 48이  $TM(\Lambda)$ 의 크기가 되기 때문이다. 식(16)의 시스템 행렬을 식(14)에 대입하면 식(18)과 같다.

$$\det(TM(\Lambda)) = \prod_{k=1}^{R_T(\Lambda)} \tau_k(\Lambda) \tag{18}$$

여기서  $R_T(\Lambda)$ 는 시스템 행렬  $TM$ 의 랭크,  $\tau_k(\Lambda)$ 는 시스템 행렬  $TM$ 에 대한 대수 고유치 문제<sup>(4)</sup>에서의  $k$ 번째 고유치를 의미한다.

앞에서 설명한 바와 같이 식(18)이 유효성을 갖기 위해선 랭크  $R_T(\Lambda)$ 이 시스템 행렬이 발산하는 주파수 영역에서 시스템 행렬의 크기  $S$ 보다 작은 값을 가져야 한다. 이를 확인하기 위해  $TM$ 의 랭크 곡선을 그리면 Fig. 5와 같다. 이 랭크 곡선이 저주파수 영역에서  $R_T(\Lambda) < S$ 을 만족함을 확인할 수 있다.

식(18)을 이용하여 판별식 곡선을 그린 후 불연속성을 제거하는 과정<sup>(4)</sup>을 거치면 Fig. 6과 같은 판별식 곡선이 그려진다. 이 판별식 곡선은 Fig. 3의 점선 판별식 곡선과는 달리 저주파수 영역에서 판별식 값이 발산하는 문제점이 사라졌음을 확인할 수 있다. Fig. 6의 곡선으로부터 추출한 고유치는 Table 2에 요약하였다<sup>(7)</sup>. Table 2에서 식(18)에 의해 구한 고유치들과 엄밀해가 정확히 일치함을 확인할 수 있으며, 이를 통해 이 논문에서 제안된 식(18)이 정확한 고유치 추출을 보장한다고 말할 수 있다. 다음 절에서는 오목한 홈을 가진 임의의 형상 오목 멤브레인에 대해 식(18)의 타당성과 정확성을 검증하고자 한다.

### 3.3 임의의 형상 오목 멤브레인 예제 검증

이 논문에서 제안된 식(18)이 Fig. 7과 같은 깊은 홈을 가진 임의의 형상 오목 멤브레인에 대해서도 타당한 지를 확인하고자 한다. Fig. 7(a), Fig. 7(b)와 같이 오목 멤브레인을 두 개의 블록 영역으로 나눈 후 각각 30개와 49개의 절점으로 이산화 하였다. 먼저 30개

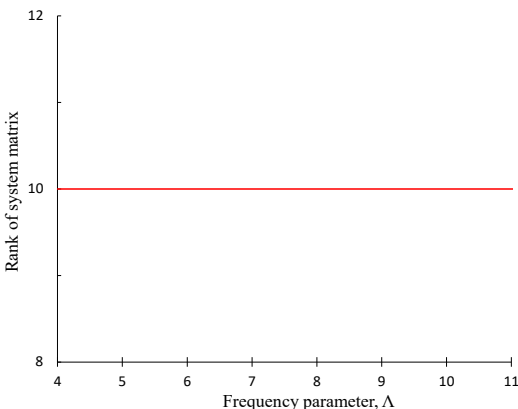


Fig. 4 Rank of SM for the rectangular membrane discretized with 41 nodes

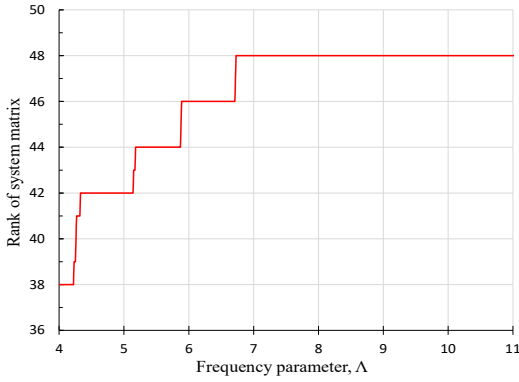


Fig. 5 Rank of TM for the rectangular membrane discretized with 41 nodes

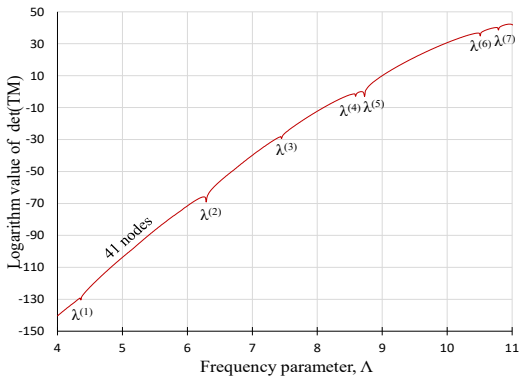
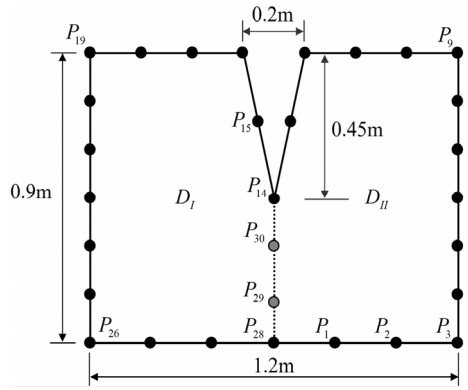


Fig. 6 Determinant curve of the rectangular membrane for 41 nodes plotted by the proposed method using Eq. (18)

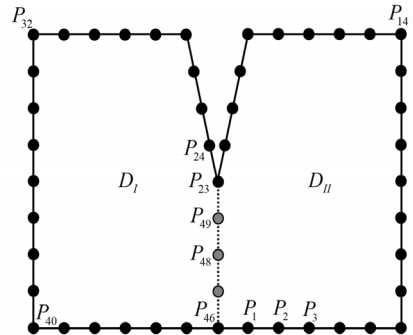
Table 2 Eigenvalues of the rectangular membrane for 41 nodes plotted by the proposed method using Eq. (18) and the exact solution

	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$
Proposed method	4.363	6.293	7.456	8.595	8.727	10.508	10.794
Exact solution	4.363	6.293	7.456	8.595	8.727	10.508	10.794

절점으로 이산화한 멤브레인에 식 (13) 또는 식 (14)를 이용한 기존 무차원동영향함수법을 적용하면 Fig. 8의 실선 판별식 곡선을 얻을 수 있다. 이 판별식 곡선의 극소값에 해당하는 1차~8차 고유치들은 Table 3에 요약되었다. 이들 고유치들을 1701개 절점을 사용한 FEM 고유치들과 비교해보면, 약간의 오차만을 가



(a) 30 nodes

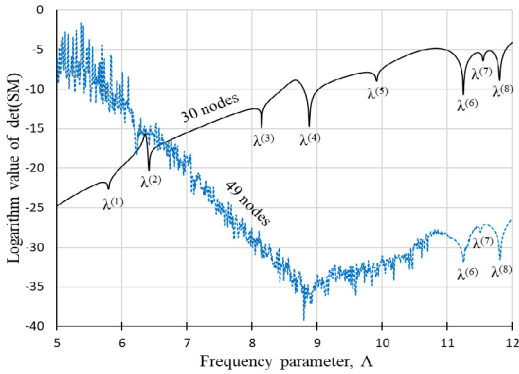


(b) 49 nodes

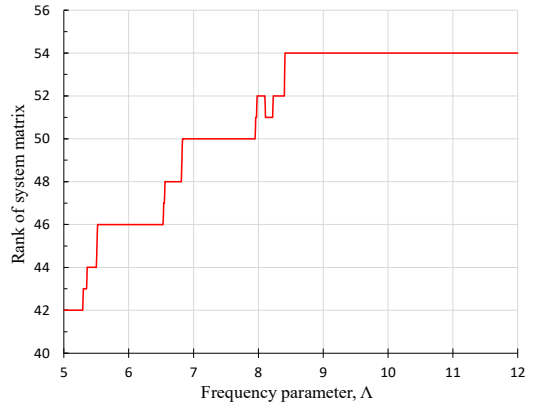
Fig. 7 Highly concave membranes divided into two domains and discretized with 30 and 49 nodes, respectively

짐을 확인할 수 있다. FEM과 마찬가지로 무차원동영향함수법 또한 절점의 개수를 증가시키면 해의 정밀도가 올라가므로, Fig. 7(b)와 같이 절점의 수를 30개에서 49개로 증가시킨 후 식 (13) 또는 식 (14)를 이용해 판별식 곡선을 그리면 Fig. 8의 점선 곡선이 된다. 이 점선 곡선을 살펴보면, 주파수 파라미터 값이 11이하인 저주파수 영역에서 시스템 행렬이 발산하여, 단지 6차~8차 고유치만이 추출되는 문제점을 확인할 수 있다. 추출된 3개의 고차 고유치들은 Table 3에 요약되었으며, 이 고유치들은 1701개를 사용한 FEM 결과에 더 근접했음을 알 수 있다.

상기의 저차 고유치 미 추출 문제를 해결하기 위해 이 논문에서 제안된 식 (18)을 사용하여 Fig. 9와 같은 판별식 곡선을 그렸다. 식 (18)을 계산하기 위해 사용된 시스템 행렬의 랭크 곡선은 Fig. 10과 같다. 이 판별식 곡선을 살펴보면 모든 주파수 영역에서 시



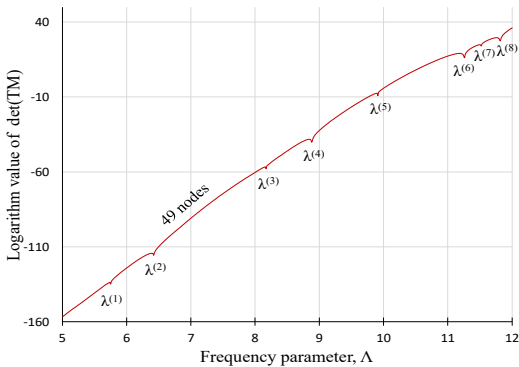
**Fig. 8** Determinant curves of the highly concave membrane for 30 and 49 nodes plotted by the previous NDIF method using Eq. (13) or Eq. (14)



**Fig. 10** Rank of TM for the highly concave membrane discretized with 49 nodes

**Table 3** Eigenvalues of the highly concave membrane obtained by the previous NDIF method using Eq. (13) or Eq. (14), FEM(ANSYS) and the proposed method

	Previous NDIF method		FEM (1701 nodes)	Proposed method (49 nodes)
	30 nodes	49 nodes		
$\lambda^{(1)}$	5.79	None	5.71	5.75
$\lambda^{(2)}$	6.42	None	6.42	6.42
$\lambda^{(3)}$	8.15	None	8.17	8.17
$\lambda^{(4)}$	8.88	None	8.89	8.88
$\lambda^{(5)}$	9.92	None	9.87	9.91
$\lambda^{(6)}$	11.25	11.26	11.31	11.26
$\lambda^{(7)}$	11.55	11.52	11.46	11.52
$\lambda^{(8)}$	11.81	11.81	11.84	11.81



**Fig. 9** Determinant curve of the highly concave membrane for 49 nodes plotted by the proposed method using Eq. (18)

시스템 행렬이 발산하지 않음을 확인할 수 있으며, 결과적으로 1차~8차 고유치 모두가 성공적으로 추출되었음도 확인된다. 이들 고유치들은 Table 3의 마지막 열에 정리되었으며, FEM 보다 훨씬 적은 절점을 사용했음에도 FEM 고유치에 거의 근접함도 확인된다.

#### 4. 결 론

무차원동영향함수법은 고정밀도 고유치를 제공하는 장점이 있으나 절점 수가 증가하면 저주파수 대역에서 시스템 행렬이 발산하여 저차 고유치들이 미 추출되는 문제점이 존재한다. 이러한 문제점을 해결할 수 있는 ‘개선된 무차원동영향함수법’이 최근의 연구에서 제시되었으나, 분할 영역법을 사용해야 되는 오목 멤브레인의 고유치 해석에서도 유효한지에 대한 연구가 필요한 상태였다. 이 논문에서는 ‘개선된 무차원동영향함수법’이 오목 멤브레인의 고유치 해석에는 유효하지 않음을 확인하였으며, 이를 극복하기 위한 ‘새로운 무차원동영향함수법’이 제안되었다. 제안된 방법의 정확성 및 타당성을 검증하기 위해 엄밀해가 존재하는 사각 멤브레인과 깊은 홈을 가진 임의 형상 멤브레인에 대한 예제 검증이 수행되었다. 보다 다양한 형상의 오목 멤브레인과 내부에 구멍을 가진 멤브레인 등에 예제 연구는 이 논문의 2부에서 수행될 예정이다.

#### 후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원 과제임.

## References

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes using the Non-dimensional Dynamic Influence Function, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(2) Koutromanos, L., 2018, *Fundamentals of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, NJ, United States.

(3) Tanaka, M. and Du, Q., 2014, *Boundary Element Methods: Principles and Applications*, Pergamon Press, Oxford, U.K.

(4) Kang, S. W., 2020, Lower-order and Higher-order Eigenmode Analyses of Arbitrarily Shaped Membranes using Non-dimensional Dynamic Influence Function Method, *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, Vol. 44, No. 12, pp. 971~977.

(5) Kang, S. W., 2022, Improvement of Eigenvalue Extraction Method in the NDIF Method for Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membranes,

*Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 32, No. 1, pp. 97~104.

(6) Kang, S. W., 2023, Application of NDIF Method for Overcoming the Problem of Lowering the Eigenvalue Accuracy of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities: Part 1(Theoretical Formulation and Verification), *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 33, No. 4, pp. 437~444.

(7) Kang, S. W., 2023, Development of NDIF Method for Extraction of Eigenvalues in the Entire Frequency Range of Clamped Plates: Part 1(Theoretical Formulation and Verification), *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 33, No. 6, pp. 699~705.



**Sang Wook Kang** received a B.S., M.S. and Ph.D. degrees in Dept. of Mechanical Design Engineering from Seoul National University. He is working in Hansung University.