

일반화된 주파수 합 빔형성을 이용한 저주파 대역 도래각 추정

Low-frequency Direction-of-arrival Estimation using Generalized Frequency-sum Beamforming

이 정 훈[†] · 박 용 성^{*} · 피터 거스토프^{**}
Jeung-Hoon Lee[†], Yongsung Park^{*} and Peter Gerstoft^{**}

(Received July 3, 2025 ; Revised July 24, 2025 ; Accepted July 24, 2025)

Key Words : Frequency-sum(합주파수), Beamforming(빔형성), Autoproduct(자기곱)

ABSTRACT

Estimating the direction-of-arrival (DOA) at low frequencies is challenging owing to the inadequate spatial resolution of conventional delay-and-sum beamforming. This study presents an alternative approach based on generalized frequency-sum (gFS) processing, which constructs higher-order spectral autoproductions up to a selected order Q . By combining frequency components, the method enhances spatial resolution when the acoustic wavelength exceeds the array aperture. The upper limit of Q is governed by the condition that the resulting frequency sum remains below the spatial Nyquist limit; in practice, this bound is further limited by noise. In addition, through a framework based on multinomial expansion, we demonstrate that gFS is inherently unsuitable for resolving multiple DOAs. Numerical simulations and experiments confirm that this technique offers a viable solution for single-source DOA estimation in the low-frequency regime.

1. 서 론

센서배열을 이용한 도래각(direction of arrival, DOA) 추정은 레이더, 소나, 무선통신 등 다양한 신호처리 분야에서 활발히 연구되고 있는 주제이다⁽¹⁾. 도래각 추정의 대표적인 방법은 지연-합(delay-and-sum) 기반의 빔포밍(conventional beamforming, CBF) 방법이 보편적으로 사용된다^(2,3). 구현이 간단하고 직관적이지만, 저주파 대역에서는 해상도(공간 분해능)이 부족하여 적용이 어렵다. 저주파 신호는 아파트 층간

충격음⁽⁴⁾, 고래 울음소리⁽⁵⁾, 공동현상(cavitation)에 의한 프로펠러 소음 등 다양한 상황에서 발생한다⁽⁶⁻⁸⁾.

적응형 기법인 MVDR(minimum variance distortionless response)과 MUSIC(Multiple Signal Classification)은 CBF의 해상도 한계를 개선한다는 장점이 있으나, 배경잡음이 낮고, 신호원이 비상관적이며, 스냅샷(snapshot)이 충분한 경우에 한해 효과적이다^(9,10). 압축센싱(compressive sensing, CS) 기법은 고해상도 구현이 가능하지만, 저주파 영역에서는 관측행렬의 기저벡터들이 서로 상관성을 가지게 되어 도래각 추정 정확도를 저해한다^(11,12).

[†] Corresponding Author ; Member, Dept. of Mechanical Engineering, Changwon National University, Professor
E-mail : jhoonlee@changwon.ac.kr

^{*} Applied Ocean Physics and Engineering, Woods Hole Oceanographic Institution, Research Scientist

^{**} Scripps Institution of Oceanography, University of California, Professor

[‡] Recommended by Editor Hanshin Seol
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

Abadi et al.은 광대역 신호를 가정하여 주파수합 빔포밍(frequency-sum beamforming, FS)을 제안한 바 있다⁽¹³⁾. 이 방법은 동일한 공간 위치에서 대역 내 두 주파수 성분을 곱하는 2차 주파수합 자기곱(frequency-sum autoprodut)을 활용한다. 자기곱 개념은 주파수 ‘차’ 빔포밍(frequency-difference beamforming, FD)과 함께 제안되었으며⁽¹⁴⁾, FD는 낮은 주파수 성분의 클레복소를 높은 주파수 성분과 곱하여 주파수차 자기곱을 생성한다⁽¹⁵⁻¹⁷⁾. 주파수차 자기곱은 그것을 구성하는데 사용된 두 성분의 차주파수, 즉, 낮은 주파수에서의 음장을 모사한다는 것이 밝혀졌다⁽¹⁸⁾. 따라서, FD는 대역 내 주파수보다 훨씬 낮은 주파수에서 빔포밍을 수행하며, 이는 센서 간격의 두 배보다 짧은 파장을 가지는 고주파 신호의 도래각을 추정하는데 적합하다⁽¹⁸⁻²⁰⁾.

FS는 FD와 반대 개념으로 이해할 수 있다. 스펙트럼 성분 두 개의 곱으로 정의되는 주파수합 자기곱은 합주파수에서의 음장을 모사할 수 있다. FS는 합주파수에서 빔포밍을 수행하므로 빔폭(beamwidth)을 좁힐 수 있으며, 이는 CBF보다 높은 공간 해상도를 제공한다. 따라서, 배열 크기보다 더 큰 파장을 가지는 저주파 신호에 대해 효과적이다.

이 논문에서 제안하는 Q 차 주파수합 자기곱을 이용한 일반화된 주파수합 빔포밍(generalized frequency-sum beamforming, gFS)은 기존 FS의 해상도 한계를 극복하기 위함이다. 이 고차 자기곱은 대역 내 Q 개 주파수 성분을 곱하여 구성되며, 자기곱 구성에 사용된 주파수를 모두 더하여 합주파수를 얻는다. 높은 차수의 정보를 높은 합주파수에서 처리함으로써 해상도 향상을 기대할 수 있다. Q 차 자기곱은 단순히 Q 개의 성분을 곱하는 방식이므로, 계산 복잡도는 기존 FS와 동일하게 유지된다. 따라서, 이 방법은 간단한 구현 대비 해상도 향상의 효용이 크다.

또한, 고차 자기곱은 해상도 개선을 위한 기존의 알고리즘과도 쉽게 결합될 수 있다는 측면에서도 장점을 갖는다. 예를 들어, 저자들은 주파수차 자기곱을 압축센싱 및 MUSIC 알고리즘에 적용함으로써, 근접한 두 음원에 대한 분리가 가능함을 보여준 바 있다^(21,22).

Abadi et al.은 주파수합 자기곱을 MVDR 알고리즘과 결합하여 공동현상 영상화(passive cavitation imaging)에 적용한 바 있다⁽¹³⁾. 유사한 방식으로, 고차 자기곱 역시 CS, MUSIC, MVDR 등의 고해상도 알고리즘

과도 결합이 가능하며, 이를 통해 추가적인 성능 개선이 기대된다. 이러한 확장 방향은 이 논문의 범위를 벗어나므로, 여기에서는 gFS 본연의 특징과 장-단점에 대해 집중한다.

gFS는 다중 도래각(multi-DOA) 신호뿐만 아니라, 잡음이 큰 환경에서 성능 저하를 보인다. 자기곱이 유발하는 교차항(crossterm)에 의해 허위 도래각(ghost DOA)이 발생한다. FD 기법에서는 주파수 평균을 통해 허위 성분을 억제할 수 있었지만, 주파수 합 기반의 gFS에서는 그렇지 않다. 이 논문에서는 다항전개(multinomial expansion) 이론을 통해 그 원인을 해석적으로 규명하고자 한다⁽²³⁾.

논문 구성은 다음과 같다. 2절에서는 gFS를 제안하고, 다항 전개를 활용하여 장-단점에 대해 분석한다. 3절에서는 수치 시뮬레이션과 실험을 통해 gFS 성능을 검증하고, 4절에서 결론을 맺는다.

2. 이 론

gFS는 다중 도래각 상황에서 적용이 어려우나(2.2절), 일반화를 위해 K 개 평면파(plane waves) 음원을 가정한다. 각 음파는 간격 d , M 개의 센서로 구성된 균일 선배열(ULA: uniform linear array)에 입사하고 있다. k ($= 1, \dots, K$)번째 음원은 도래각 $\theta_k \in [-90^\circ, 90^\circ]$ (0° 는 배열의 수직 방향)와 복소진폭 x_k 로 표현된다. 자기곱을 형성하기 위해 음원의 광대역성도 가정에 포함된다. 주파수 범위는 $[f_L, f_U]$ (f 의 단위는 Hz임)이나, 저주파 음원을 고려하는 상황이므로, 상한 주파수 f_U 는 배열의 공간 나이퀴스트 주파수 $f_N = c/2d$ (c 는 음속, [m/s])보다 작다는 가정도 포함한다. 주파수 구성은 반드시 연속적일 필요는 없으며, 고조파(harmonic)와 같은 이산 대역도 허용된다.

k 번째 음원과 센서 사이의 위상 지연은 식 (1)의 조향벡터로 표현된다.

$$\mathbf{a}(\theta_k, f) = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j(2\pi f/c)1d \sin \theta_k} & \dots \\ & e^{-j(2\pi f/c)(M-1)d \sin \theta_k} & \dots \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^M \quad (1)$$

상첨자 T는 전치(transpose)를, $j = \sqrt{-1}$, \mathbb{C}^M 은 M 차원 복소 열벡터를 의미하고, 단순한 해석을 위해 \sqrt{M} 으로 정규화하였다. 배열출력 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ 은 식 (2)와 같은데, $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^M$ 은 가우시안 잡음(Gaussian noise)벡터이다.

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k, f) x_k + \mathbf{n} \quad (2)$$

2.1 일반화된 주파수 합 빔형성(gFS)

Q 차 주파수합 자기곱(이하, 일반화된 자기곱이라 칭함) $\mathbf{g}_Q \in \mathbb{C}^M$ 을 식(3)과 같이 정의하자.

$$\mathbf{g}_Q = \mathbf{y}(f_1) \odot \dots \odot \mathbf{y}(f_Q) = \prod_{q=1}^Q \mathbf{y}(f_q) \quad (3)$$

여기서 \odot 기호는 성분별 곱(Hadamard 곱)을 의미한다. \mathbf{g}_Q 표시에 있어 누적곱기호 Π 를 이용하였는데, 이는 $q = 1, \dots, Q$ 에 해당하는 벡터 $\mathbf{y}(f_q)$ 들에 대한 Hadamard 곱을 의미한다. 일반적으로 Π 기호는 스칼라에 한하지만, 간결한 표현을 위해 벡터와 함께 사용하기로 한다. 자기곱을 구성하는 데 사용되는 주파수 f_q 는 신호 대역폭 내에 포함되어 있어야 하며, 또한 $f_L \leq f_1 \leq \dots \leq f_Q \leq f_U$ 를 만족해야 함을 유의한다.

K 개 도래각에 대해 \mathbf{g}_Q 는 식(4)와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{g}_Q = \prod_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K x_{kq} \mathbf{a}_{kq}(\theta_k, f_q) + \mathbf{g}_\epsilon \quad (4)$$

여기서 $x_{kq} = |x_{kq}| \exp(j\phi_{kq})$, $\phi_{kq} \in [0, 2\pi)$, \mathbf{g}_ϵ 는 잡음 항이다. 이중 하첨자 kq 는 k 번째 도래각과 q 번째 주파수를 지칭한다. 식(4)의 우변 첫 항은 신호성분으로서 총 K^Q 개 항의 합으로 구성된다. 그 중 K 개 항은 자기항(self-terms)으로서 하나의 도래각만이 나타나는 항이며, 나머지 $(K^Q - K)$ 개는 서로 다른 도래각으로 구성되는 교차항(cross-terms)이다.

신호성분에 대한 일반항 \mathbf{g}_s 는 Q 개 항의 Hadamard 곱으로 구성되는데, 다항전개에서 등장하는 선택지수(selection index) p_{kq} 를 도입하여 식(5)와 같이 표현할 수 있다⁽²³⁾.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_s &= \left[(x_{11} \mathbf{a}_{11})^{p_{11}} \odot \dots \odot (x_{1Q} \mathbf{a}_{1Q})^{p_{1Q}} \right] \odot \\ &\quad \left[(x_{21} \mathbf{a}_{21})^{p_{21}} \odot \dots \odot (x_{2Q} \mathbf{a}_{2Q})^{p_{2Q}} \right] \odot \\ &\quad \dots \odot \left[(x_{K1} \mathbf{a}_{K1})^{p_{K1}} \odot \dots \odot (x_{KQ} \mathbf{a}_{KQ})^{p_{KQ}} \right] \quad (5) \\ &= \prod_{q=1}^Q \prod_{k=1}^K (x_{kq} \mathbf{a}_{kq}(\theta_k, f_q))^{p_{kq}} \end{aligned}$$

선택지수 p_{kq} 는 1 또는 0의 값을 가지며, 각각

$x_{kq} \mathbf{a}_{kq}$ 를 ‘선택’ 또는 ‘배제’함을 의미한다. p_{kq} 는 식(6)과 같은 규칙을 따른다.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q p_{kq} = Q, \quad \sum_{k=1}^K p_{kq} = 1 \quad (6)$$

앞의 조건은 \mathbf{g}_s 가 Q 개 항으로 구성되도록 하며, 뒤의 조건은 주파수 f_q 에 대해 K 개 도래각 가운데 하나의 도래각이 선택되도록 제한한다. 선택지수는 자기항과 교차항을 구분하고 추출하는 데 유용하다. 식(7)과 같이 특정 k 에 대해 합산한 값이 Q 가 되는 경우, \mathbf{g}_s 는 k 번째 도래각에 대응하는 자기항이 되고, 그 합이 Q 보다 작은 식(8)과 같은 경우, \mathbf{g}_s 는 교차항 중의 하나가 된다.

$$\sum_{q=1}^Q p_{kq} = Q \quad (7)$$

$$\sum_{q=1}^Q p_{kq} < Q \quad (8)$$

그에 대한 예시를 Table 1과 Table 2에 보였다. 각 열은 값이 1인 단 하나의 비영(non-zero) 요소만 포함하고 있는데, 식(6)의 두 번째 조건을 만족하는 구성이다. Table 1은 비영 요소가 두 번째 행에만 존재하고 나머지는 모두 0으로 채워져 있다. 즉, 식(7)

$$\sum_{q=1}^Q p_{2q} = Q \text{를 만족한다.}$$

따라서, Table 1에 해당하는 \mathbf{g}_s 는 두 번째 ($k=2$) 도래각 θ_2 에 대한 자기항이 된다. 반면, Table 2에서는 비영 요소의 위치가 열에 따라 다른데, 식(8) 조건에 부합한다. 결과적으로, Table 2에 대한 \mathbf{g}_s 는 교차항(cross-term) 중 하나가 된다.

주파수차 자기곱은 차주파수에서의 평면파 음장을 모사한다^(14,16,19,20). 유사하게, 주파수합 자기곱 \mathbf{g}_Q 는 합주파수 $f_\Sigma = \sum_{q=1}^Q f_q$ 에서 평면파 음장을 모사한다.

이는 평면파 음장 $y(f, \mathbf{r}) = x \exp\left(j \frac{2\pi f}{c} (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r})\right)$ 을 이용하여 증명할 수 있는데, x 는 진폭, \mathbf{e}_s 는 음파진행 방향과 나란한 단위벡터, \mathbf{r} 은 위치벡터를 의미한다. 이때, 자기곱 음장은 식(4)에서 $K=1$, $\mathbf{g}_\epsilon = 0$ 으로 두고 얻을 수 있다.

식(9)는 진폭 측면에서 차이가 있지만, 주파수가 f_Σ 인 평면파와 그 형태가 동일하므로 자기곱 음장이

평면파 음장을 모사한다는 것을 알 수 있다.

$$g_Q|_{K=1, g_e=0} = \prod_{q=1}^Q x_{kq} \exp\left(\frac{j2\pi f_{\Sigma}}{c}(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r})\right) \quad (9)$$

그러므로, 고차 자기곱 \mathbf{g}_Q 와 합주파수 조향벡터 $\mathbf{a}(\theta, f_{\Sigma})$ 간 빔형성인 gFS를 제안할 수 있다. 구체적으로, Q 차 일반화 주파수 합 빔파워 B_Q 는 식(10)과 같다.

$$B_Q = \langle |\mathbf{a}^H(\theta, f_{\Sigma})\mathbf{g}_Q|^2 \rangle_{f_{\Sigma}, L} \quad (10)$$

상첨자 H는 허미시안 전치(Hermitian transpose)를, 기호 $\langle \cdot \rangle_{f_{\Sigma}, L}$ 는 f_{Σ} 와 L 개 스냅샷에 대한 비상관 평균(incoherent averaging)을 의미한다.

$Q=1$ 인 경우의 자기곱 \mathbf{g}_1 은 단일 주파수 f_1 에서의 배열출력 \mathbf{y} 가 되므로, B_1 은 CBF와 등가하다. $Q=2$

Table 1 Selection index example for self-term extraction

$k \backslash q$	1	2	3	...	Q	$\sum_{q=1}^Q p_{kq}$
1	0	0	0	...	0	0
2	1	1	1	...	1	Q
3	0	0	0	...	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K	0	0	0	...	0	0
$\sum_{k=1}^K p_{kq}$	1	1	1	...	1	$\sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q p_{kq} = Q$

Table 2 Selection index example for cross-term extraction

$k \backslash q$	1	2	3	...	Q	$\sum_{q=1}^Q p_{kq}$
1	0	1	0	...	0	$1 (< Q)$
2	1	0	1	...	0	$2 (< Q)$
3	0	0	0	...	0	$0 (< Q)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K	0	0	0	...	1	$1 (< Q)$
$\sum_{k=1}^K p_{kq}$	1	1	1	...	1	$\sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q p_{kq} = Q$

인 경우의 gFS는 FS와 동일하며, 합주파수 f_1+f_2 는 단일 주파수 (f_1 또는 f_2) 보다 더 높은 처리 주파수에 해당하므로 CBF 보다 좁은 빔폭을 얻을 수 있다. $Q>2$ 조건에서는 빔폭은 더욱 좁아지며, gFS의 특징이 부각되기 시작한다. 높은 해상도를 위해 높은 Q 가 바람직하지만, 지나치게 큰 Q 는 공간 에일리어싱(spatial aliasing)에 의한 허위 도래각 발생을 초래한다. 최대 Q 는 합주파수 f_{Σ} 가 배열의 나이퀴스트 주파수 이하가 되도록 제한해야 한다($f_{\Sigma} \leq f_N$). 파장 λ 관점에서 이 조건은 $d/\lambda_{\Sigma} \leq 0.5$ 와 같으며, $\lambda_{\Sigma} = c/f_{\Sigma}$ 는 합주파수에 대응하는 파장이다. 한편, 잡음의 존재는 Q 를 최대치까지 증가시키는 데 있어 추가 제약을 가하는데, 관련 논의는 3.1절에서 다룬다.

2.2 다중 도래각에 대한 제한

다중 도래각 상황 ($K \geq 2$)에서는 ($K^Q - K$)개의 허위 도래각이 존재하게 되어, gFS의 적용이 어렵다. 허위 도래각 θ_g 는 교차항에 의한 것이며, 이는 공간 나이퀴스트 기준 위반에 의해 발생하는 허위 도래각과는 개념적으로 구분된다. 조향벡터 $\mathbf{a}(\theta, f_{\Sigma})$ 와 신호 일반화 \mathbf{g}_s 간 내적(빔포밍)을 취한 결과는, 실 도래각 뿐만이 아니라 허위 도래각에서 국소 최대값을 가진다. 따라서, θ_g 는 식(11)과 같이 조향벡터 $\mathbf{a}(\theta, f_{\Sigma})$ 와 벡터 $\mathbf{a}_g(\theta_k, f_q)$ 간 내적 최대화를 통해 계산할 수 있다. 여기서, $\mathbf{a}_g(\theta_k, f_q)$ 는 식(5)에서 $x_{kq} = 1$ 로 설정하고 얻은 교차항과 관련한 신호성분을 의미한다.

$$\begin{aligned} \theta_g &= \arg \max_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta, f_{\Sigma}) \mathbf{a}_g(\theta_k, f_q) \\ &= \arg \max_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta, f_{\Sigma}) \left(\prod_{q=1}^Q \prod_{k=1}^K \mathbf{a}_{kq}^{p_{kq}}(\theta_k, f_q) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

식(1)에서와 같이 조향벡터를 \sqrt{M} 으로 정규화함에 따라, $\mathbf{a}(\theta, f_{\Sigma})$ 와 $\mathbf{a}_g(\theta_k, f_q)$ 의 l_2 -norm은 각각 1과 M^{1-Q} 가 되고, 두 벡터간 내적 최대값은 M^{1-Q} 가 된다. 따라서, 식(11)은 식(12)를 θ_g 에 대해 푸는 것과 등가하다.

$$\mathbf{a}^H(\theta_g, f_{\Sigma}) \left(\prod_{q=1}^Q \prod_{k=1}^K \mathbf{a}_{kq}^{p_{kq}}(\theta_k, f_q) \right) = M^{1-Q} \quad (12)$$

식(12)에 식(1)과 \mathbf{a}_g 의 m 번째 성분에 대한 표현을 식(13)에 적용하고, \exp 함수의 위상항이 동일해야 하는 조건을 반영하면, θ_g 는 식(14)와 같은 조건을 만족해야함을 알 수 있다.

$$\mathbf{a}_g(\mathbf{m}) = \frac{1}{M^{Q/2}} \prod_{q=1}^Q \prod_{k=1}^K \exp[j(2\pi f_q/c)(m-1)d \sin\theta_k p_{kq}] \quad (13)$$

$$= \frac{1}{M^{Q/2}} \exp \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K [j(2\pi f_q/c)(m-1)d \sin\theta_k p_{kq}]$$

$$f_{\Sigma} \sin\theta_g = \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q f_q p_{kq} \sin\theta_k \quad (14)$$

또한, 정규화 주파수(normalized frequency) a_k 를 식 (15)와 같이 정의하면, 식 (14)를 식 (16)과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$a_k = \frac{\sum_{q=1}^Q f_q p_{kq}}{f_{\Sigma}} \quad (15)$$

$$\sin\theta_g = \sum_{k=1}^K a_k \sin\theta_k \quad (16)$$

p_{kq} 의 특성상 $0 \leq a_k \leq 1$ 이며, $\sum_{k=1}^K a_k = 1$ 인 점에 주목하면 식 (16)은 식 (17)과 같이 귀결되는데, 식 (17)과 같은 부등식은 허위 도래각 θ_g 는 항상 실 도래각 범위 내에 존재함을 시사하고 있다.

$$\sin\theta_1 \leq \sin\theta_g \leq \sin\theta_K \rightarrow \theta_1 \leq \theta_g \leq \theta_K, \quad (17)$$

$$(\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_K)$$

간단한 예시로, 두 개의 실 도래각 (θ_1, θ_2)에 대해 두 주파수 (f_1, f_2)로 구성된 2차 자기곱을 고려하자. 식 (16)에 따르면 두 개의 허위 도래각 θ_{g1} 과 θ_{g2} 은 식 (18a)와 식 (18b)와 같은 조건을 충족한다.

$$\begin{cases} \sin\theta_{g1} = (1 - \alpha_1)\sin\theta_1 + \alpha_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_{g2} = \alpha_1\sin\theta_1 + (1 - \alpha_1)\sin\theta_2 \end{cases} \quad (18a)$$

또는

$$\begin{cases} \sin\theta_{g1} = \alpha_2\sin\theta_1 + (1 - \alpha_2)\sin\theta_2 \\ \sin\theta_{g2} = (1 - \alpha_2)\sin\theta_1 + \alpha_2\sin\theta_2 \end{cases} \quad (18b)$$

여기서 $\alpha_1 = f_1/(f_1 + f_2), \alpha_2 = f_2/(f_1 + f_2)$ 이고, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ 을 만족한다. 만약 $\alpha_1 = 0, (\alpha_2 = 1)$ 이면, $\sin\theta_{g1}(\sin\theta_{g2})$ 는 $\sin\theta_1(\sin\theta_2)$ 이 되고, 반대로 $\alpha_1 = 1(\alpha_2 = 0)$ 일때, $\sin\theta_{g1}(\sin\theta_{g2})$ 는 $\sin\theta_2(\sin\theta_1)$ 가

된다. 따라서 $\sin\theta_1 \leq (\sin\theta_{g1}, \sin\theta_{g2}) \leq \sin\theta_2$, 혹은 $\theta_1 \leq (\theta_{g1}, \theta_{g2}) \leq \theta_2$ 가 성립한다.

주파수 ‘차’ 기법에서는 허위 도래각이 실 도래각의 범위 내부 뿐 아니라 외부도 발생하므로, 식 (10)과 같은 주파수 평균을 통한 억제가 가능하다^(15,21,22). 그러나, 주파수 ‘합’ 기법에서는 허위 도래각이 실 도래각 범위 $[\theta_1, \theta_K]$ 에만 국한되므로, 평균화를 통한 허위 성분의 억제가 어렵게 되는 것을 증명할 수 있다.

3. 검 증

3.1 단일 도래각 시뮬레이션

가장 단순한 상황, 경계가 없는 공기 중 환경에서 단일 도래각 ($K=1$)이 존재하는 경우를 고려하면, 센서 간격 $d = 0.01$ m, 센서 개수 $M = 20$ 개이다. 배열의 나이퀴스트 주파수는 $f_N = 17.0$ kHz ($c = 340$ m/s)이며, 음원의 대역폭은 $[f_l, f_u] = [170 (=0.01f_N), 680 (=0.04f_N)]$ Hz로서, f_N 대비 매우 낮은 주파수 대역을 가정한다.

이 시뮬레이션의 목적은 Q 증가에 따른 gFS의 분해능 향상을 확인하는 데 있다. 신호모델 식 (2)를 이용하여, $L = 20$ 개의 스냅샷을 생성하였고, 신호대 잡음비(signal-to-noise ratio, SNR)는 25 dB로 식 (19)와 같이 설정하였다.

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E \left[\left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) x_k \right\|_2^2 \right]}{E \left[\left\| \mathbf{n} \right\|_2^2 \right]} \quad (19)$$

빔파워 산출시 빔폭을 일정하게 유지하기 위해 (해상도를 유지하기 위해), 합주파수 f_{Σ} 변화에 대한 평균은 취하지 않는다. 대신, 주어진 Q 에 대해 신호대역 $[f_L, f_U]$ 를 Q 개의 하위밴드(sub-band)로 균등분할하고, $q(=1, \dots, Q)$ 번째 하위밴드의 중심 주파수를 f_q 로 설정하였다. 즉, 식 (20)의 분할조건에서 엘리어링을 방지하지 하기 위한 최대 Q , 즉, 반파장 센서간격 조건 ($d/\lambda_{\Sigma} = 0.5$)을 만족하는 Q 는 40이 된다.

$$f_q = f_L + (f_U - f_L) \frac{q}{Q+1} \quad (20)$$

Fig. 1은 실 도래각 $\theta_1 = 0^\circ$ 에 대해, Q 증가에 따른 gFS의 특성 변화를 관찰하고 있다. $Q=1$ 일 때, 즉, Fig. 1(a)의 CBF는 실 도래각 주변으로 평탄하고 넓은 빔을 가지는데, Rayleigh 분해능 한계 $\Delta\theta = \sin^{-1}(\lambda_{\Sigma}/Md)$

가 정의되지 않는다는 점 역시 뚜렷하지 않는 주엽의 특성을 반영한다³⁾. Fig. 2(b)의 $Q=2$ (FS)인 경우에도, 그림에 표시된 d/λ_F 값이 작으므로 해상도 향상은 제한적이다.

$Q=10$ 일때, 해석 주파수 증가에 의해 주엽이 수축되고, 부엽이 나타나기 시작한다. Q 가 최대차수 40에 도달하면, Fig. 1(d)에서 보듯이 예리한 빔이 형성되고 만족스러운 해상도를 얻을 수 있다. Q 가 최

대값을 초과하면, 주엽은 더욱 수축하지만 Fig. 1(e)과 같이 엘리어싱에 의한 허위 도래각이 발생한다.

0° 이의 도래각에 대한 검증은 식 (21)의 Gram 행렬 \mathbf{G} 를 이용한다¹¹⁾.

$$\mathbf{G} = |\mathbf{A}^H \mathbf{A}| \tag{21}$$

행렬 $\mathbf{A} = [a(\theta_1, f_F) \dots a(\theta_N, f_F)] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 는 합주

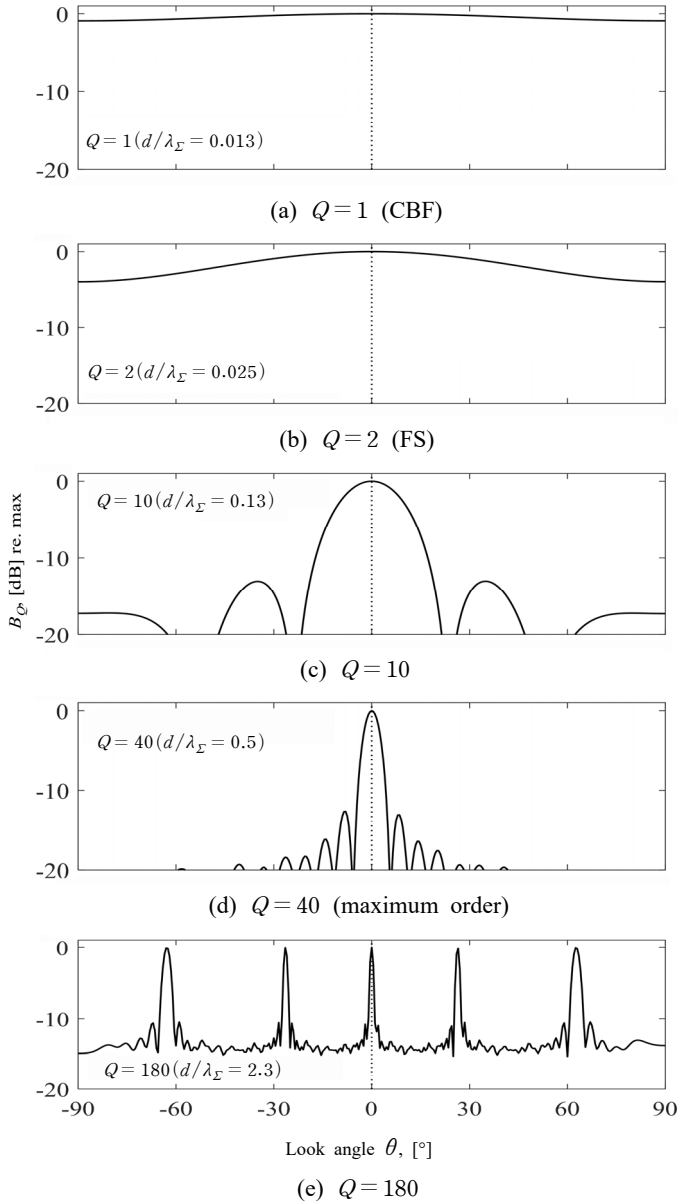


Fig. 1 Single DOA simulation result: B_Q . Dotted lines represent the true DOA ($\theta_1 = 0^\circ$)

파수 f_{Σ} 에서 산출된 모든 조향벡터를 수집하여 구성되므로, \mathbf{G} 의 각 열(또는 행)은 도래각 $\theta_1 \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 에 대한 빔패턴(Beampattern)으로 간주할 수 있다.

Fig. 1에 사용된 Q 에 대해 산출한 Gram 행렬을 Fig. 2에 나타냈다. 배열에 대한 수직방향(broadside, 그림에서 0° 에 가까운 영역) 입사조건에서는 빔폭이 좁게 유지되지만, 측면입사(endfire, 그림에서 $\pm 90^\circ$ 에 가까운 영역)에 가까울수록 빔폭이 넓어진다. 중요한 점은, Q 증가에 따라 주엽이 더 예리하고 집중되는 형태로 변하며, 이는 곧 해상도 향상을 의미한다는 것이다. Q 가 최대차수에 도달하면 $\pm 90^\circ$ 부근에서만

엘리어싱이 발생한다(Fig. 2(d)). 최대차수를 크게 웃돌 경우, 실 도래각 외 허위 도래각 성분이 지배적으로 발생한다(Fig. 2(e)).

특정 도래각 $\theta_1 = -45^\circ, 0^\circ, +45^\circ$ 에 대해 Q 를 점진적으로 증가시키며 얻은 빔패워를 Fig. 3에 보였다. 엘리어싱이 유발하는 허위 도래각 발생을 방지하기 위해서는 $d/\lambda_{\Sigma} < 0.5$ 조건을 만족하도록 Q 가 지정되어야 함을 다시 한번 강조하고 있다.

Fig. 4는 SNR을 5 dB 수준으로 낮추어 얻은 결과이며, Fig. 1과 대비하여 볼 때 Q 가 증가할수록 잡음에 민감하게 반응하고 있음을 알 수 있다. 해석적 접근을 위해 $K=1$ (단일 도래각)인 경우의 \mathbf{g}_Q 를 식 (2)와 식 (3)을 이용하여 전개하면, 식 (22)이며, 여기서 $x_q \mathbf{a}_q$ 는 $x_{1q} \mathbf{a}_{1q}(\theta_1, f_q)$ 의 약식 표기이다.

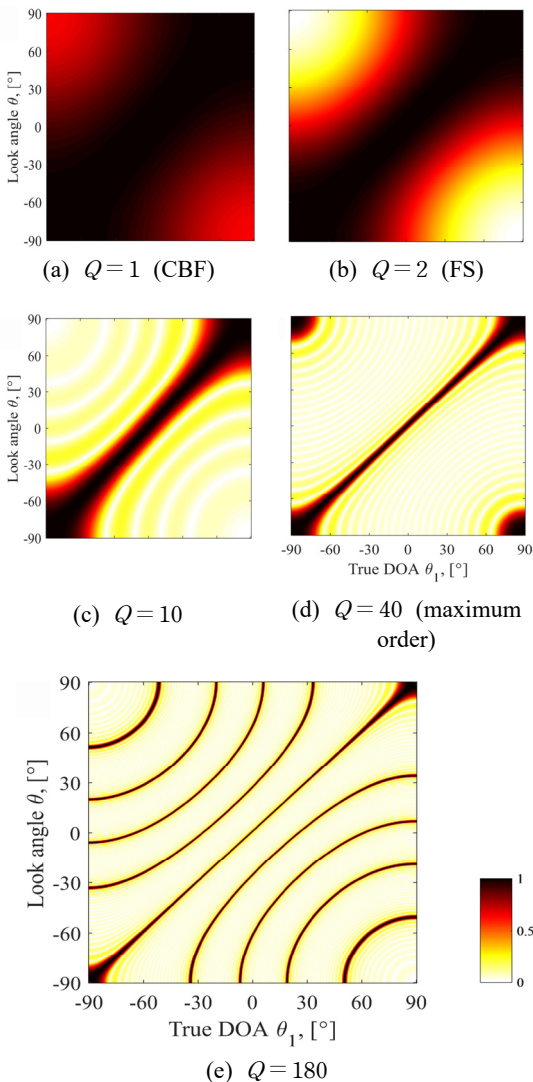


Fig. 2 Gram matrix \mathbf{G}

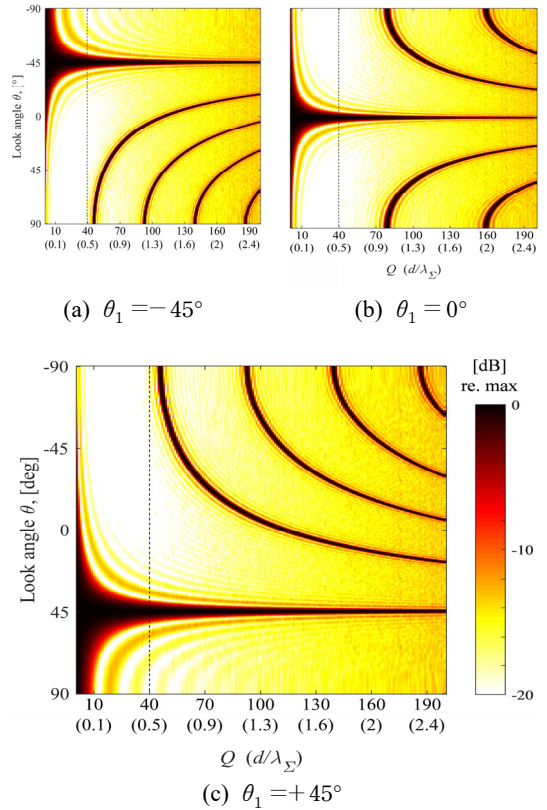


Fig. 3 2D map of beampower B_Q as a function of the order Q and look angle θ for the true DOAs. The value in parentheses on the horizontal-axis is the d/λ_{Σ} corresponding to each Q . Dotted line shows the maximum Q , below which is aliasing free

$$\mathbf{g}_Q|_{K=1} = \prod_{q=1}^Q (x_q \mathbf{a}_q + \mathbf{n}_q) \quad (22)$$

첨자 $k=1$ 을 생략하여 선택지수를 단순화하고, $p_q = 1$ 또는 0으로 두면, 식(22)는 식(23)과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{g}_Q|_{K=1} = \prod_{q=1}^Q (x_q \mathbf{a}_q)^{p_q} \mathbf{n}_q^{1-p_q} \quad (23)$$

$p_q = 1$ 을 만족할 경우 ($\sum_{q=1}^Q p_q = Q$), $\mathbf{g}_Q|_{K=1}$ 의 신호

항이 추출되며, $\sum_{q=1}^Q p_q < Q$ 인 경우에는 잡음 항이 분리된다. 따라서 $\mathbf{g}_Q|_{K=1}$ 은 식(24)와 같은 신호-잡음 분해가 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_Q|_{K=1} &= \mathbf{g}_s + \mathbf{g}_\epsilon \\ &= \prod_{q=1}^Q x_q \mathbf{a}_q + \sum \prod_{q=1}^Q (x_q \mathbf{a}_q)^{p_q} \mathbf{n}_q^{1-p_q} \end{aligned} \quad (24)$$

잡음항 \mathbf{g}_ϵ 는 총 $(2^Q - 1)$ 개의 항으로 구성되며, 각 항은 신호항 \mathbf{g}_s 와 동일한 차수 Q 를 갖는다. Q 가 증가

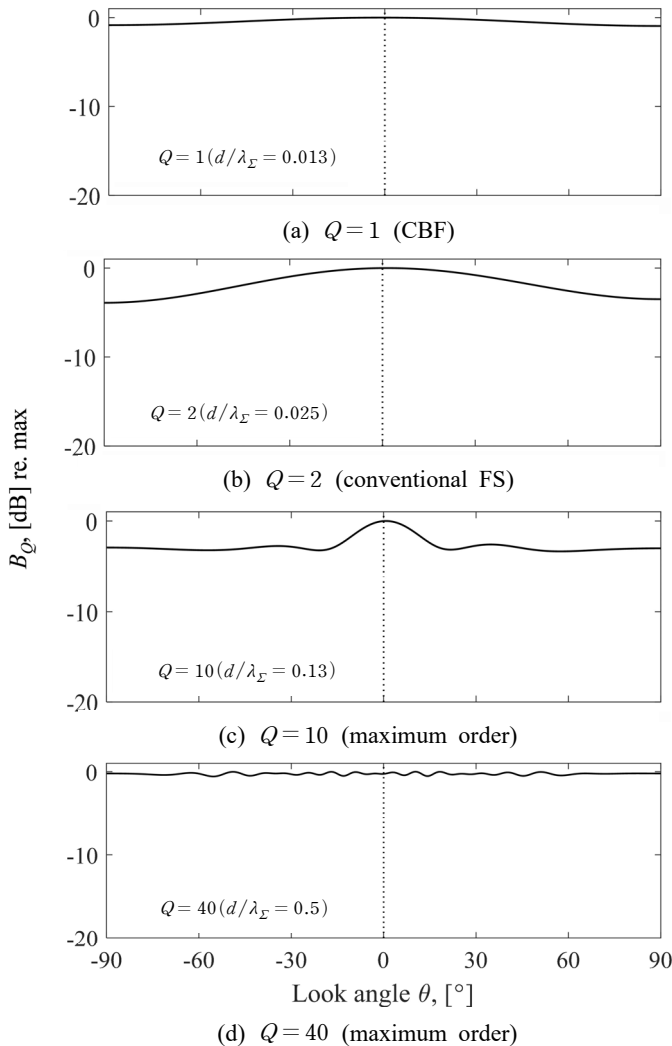


Fig. 4 Single DOA simulation result for a low SNR of 5 dB ($L = 20$): B_Q . Dotted lines represent the true DOA ($\theta_1 = 0^\circ$)

함에 따라 \mathbf{g}_e 에 포함되는 항의 개수가 급격히 증가하므로, 전체 자기잡에 기여하는 영향도 그에 비례해 커지게 됨을 알 수 있다.

여러 SNR 및 Q 에 대해 계산된 빔파워 B_Q 의 최대 부엽수준(MSL: maximum sidelobe level)을 Fig. 5에 보였다. 높은 SNR 조건에서는 Q 에 관계없이 낮은 수준을 유지하지만, 잡음이 큰 경우(저 SNR조건) Q 가 증가할수록 MSL이 상승하게 된다. 잡음이 존재하는 실제 환경에서 Q 를 최대치까지 증가시키는 것이 제한될 수 있음을 의미하나, 적절한 Q 를 선택한다면 이 기법은 저 SNR 환경에서도 실용 가능한 수준의 해상도를 제공할 수 있음을 시사한다.

3.2 다중 도래각 시뮬레이션

다중 도래각 시뮬레이션의 목적은 교차항이 유발하는 허위 도래각 성분의 부정적 영향을 확인하기 위함이다. 배열 구성 및 환경은 단일 도래각 상황과 동일하지만, 교차항 유발 허위 도래각을 시각화하기 위해 주파수 대역폭을 $[f_L, f_U] = [0.01f_N, 0.6f_N]$ 으로 확장하였다.

$K=2, K=3$ 의 두 가지 경우를 고려하며, 전자의 경우 실 도래각은 $\theta_1 = -45, \theta_2 = +45$ 에, 후자의 경우 $\theta_1 = -45, \theta_2 = 0, \theta_3 = +45$ 에 위치한다. 음원을 $x_{kq} = \exp(j\phi_{kq})$ 로 모형화하고, 위상 ϕ_{kq} 는 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 가정하였다, $\phi_{kq} \sim U[0, 2\pi]$. 즉, 단위 진폭을 가진 음원은 서로 비

상관적(incoherent)임을 가정한다.

허위 도래각이 주파수에 대해 변하도록 강제하고, 동시에 이를 최대한 억제하기 위해 다음과 같은 주파수 평균화를 적용한다. 주어진 대역 $[f_L, f_U]$ 의 양 끝에서 오프셋(offset) f_r 만큼 차감하여 얻은 i 번째 하위밴드 $[f_{li}, f_{ui}]$ 에 대해, 식 (20)의 균등 분할 방식을 적용한다. 부연하면, $i(=1, \dots, F)$ 번째 하위밴드는 다시 Q 개의 하위-하위밴드(sub-sub-bands)로 균등 분할되며, 이로부터 $i-q$ 번째 하위-하위밴드의 주파수 f_{iq} 가 결정된다. 수식으로 표현하자면 식 (25), 식 (26)과 같다.

$$f_{iq} = f_{li} + (f_{ui} - f_{li}) \frac{q}{Q+1}, \tag{25}$$

$$(i = 1, \dots, F, q = 1, \dots, Q)$$

$$f_{li} = f_L + (i-1)f_r, \tag{26}$$

$$f_{ui} = f_U - (i-1)f_r$$

여기서 $F = (f_U - f_L)/2f_r$ 은 하위밴드의 개수, 즉 주파수 평균횟수이다. 이 시뮬레이션에서는 f_r 을 10으로 설정하였으며, 이에 $F=511$ 개의 하위밴드가 생성된다. 각 i 번째 하위밴드에 대해 스냅샷 $L=20$ 개를 생성하므로, 전체 $L \times F = 10,200$ 회 평균을 통해 빔파워를 얻는다. 이보다 큰 회수의 평균을 취하더라도, 식 (26)에 보이는 결과보다 더 이상의 주목할만한 변화가 감지되지 않았다.

Fig. 6은 $K=2$ (좌측열)와 $K=3$ (우측열)에 대한 결과를 열로, 세가지 Q 에 대한 결과를 행으로 구분하여 보이고 있다. 상단, 중간, 하단 행은 각각 $Q=1$ (CBF), $Q=2$ (FS), $Q=3$ (gFS)에 해당한다. $Q \geq 4$ 인 경우, 합주파수 f_T 가 배열의 나이퀴스트 주파수를 초과하여 엘리어싱에 의한 허위 도래각 성분이 발생하므로 고려하지 않는다.

각 그림은 두 개의 하위 그림으로 구성되며, 좌측은 i 번째 하위밴드의 결과를 2D맵으로, 우측은 그 수평축에 대한 평균값인 B_Q 를 보여준다. 단, 2D맵의 수평축은 하위밴드 인덱스 i 대신 정규화 주파수 $\alpha_1 (= f_{i1}/f_T)$ 으로 표시하였다.

CBF에서는 교차항이 발생하지 않으므로, 실 도래각 주변으로 정적 성분만이 형성됨을 볼 수 있으며, 빔폭은 넓지만 실 도래각 성분을 식별할 수 있다(상

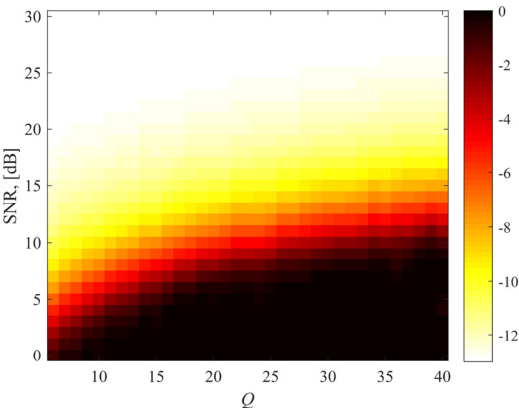


Fig. 5 Maximum sidelobe level (MSL) of B_Q as a function of Q and SNR. Results for $Q < 5$ are not reported as no sidelobe is present in that region

단행). 반면, FS 해석 결과에서는 실 도래각 범위 내에서 동적으로 변하는 허위 도래각이 나타나며(중간행), 식(16)의 계산결과와 일치함을 흰색 점선을 통해 확인할 수 있다. 허위 도래각은 주파수 평균 이후에도 잔류하며, 예기치 않은 빔과위 증가를 유발한다. 이 예시에 한해 실 도래각을 식별할 수 있으나, 식(25)와 다른 분할 방식이 사용될 경우 그 구분이 더욱 모호할 수 있다. gFS에서는 허위 성분의 기여도가 지배적이다(하단행). 평균화를 수행하더라도 이 성분들은 θ_1 과 θ_K 사이에 집중되어 여러 국소 피크를 형성한다. 이로 인해, 실제보다 더 많은 도래각이 존재하는 것

처럼 보이게 만드는 오해를 초래한다.

Fig. 7은 단일 도래각 시뮬레이션과 같은 저주파 대역 $[f_L, f_U] = [0.01f_N, 0.04f_N]$ 에 대한 해석결과를 보이고 있다. 고 SNR 조건에서는(상단), Q 증가에 따라 실 도래각 범위내 파워 집중 현상이 더욱 뚜렷해지고, 저 SNR 조건에서는(하단) 그 성능이 더욱 악화됨을 알 수 있다.

3.3 단일 도래각 실험

단일 도래각에 상황에 대한 유효성 검증을 위해, Fig. 8과 같이 관련 실험을 무향실에서 수행하였다.

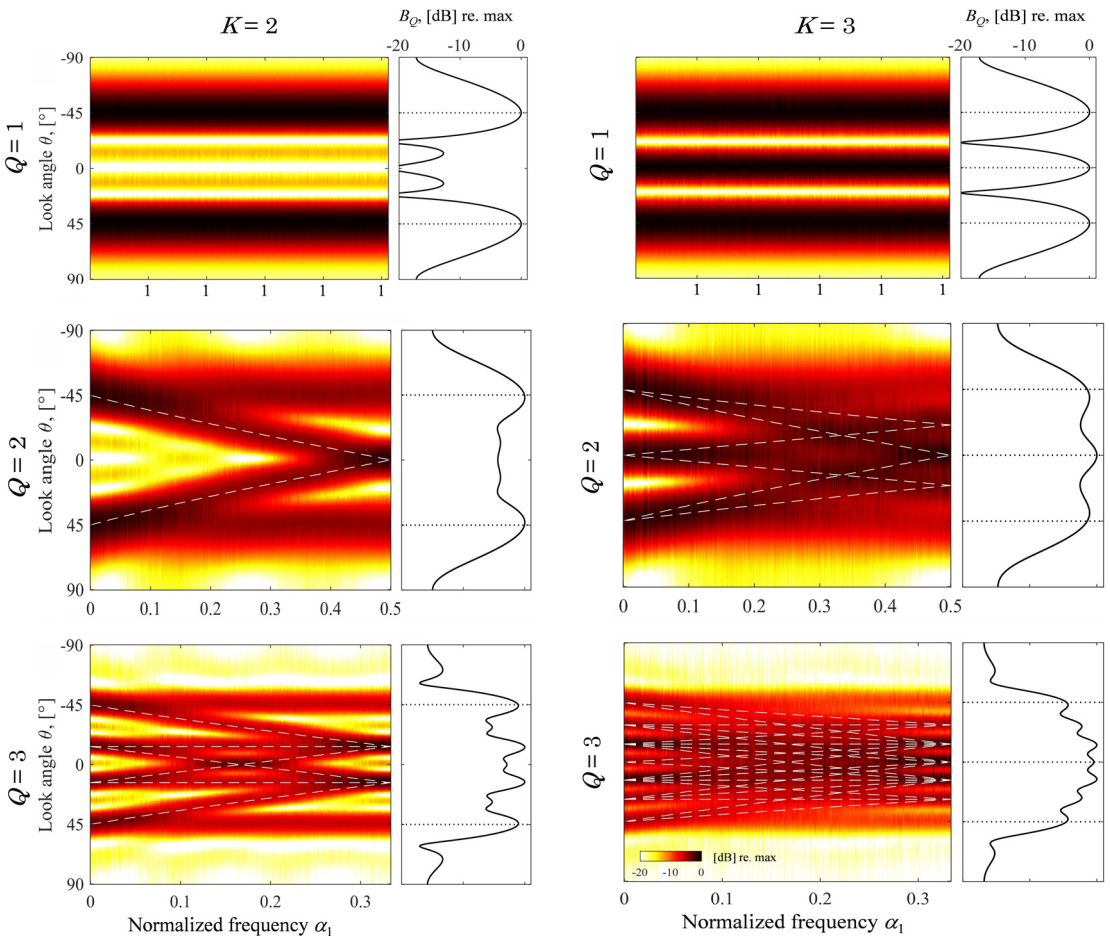


Fig. 6 Multi-DOAs simulation for $K=2(\theta_1=-45^\circ, \theta_2=+45^\circ)$ (left), $K=3(\theta_1=-45^\circ, \theta_2=0^\circ, \theta_3=+45^\circ)$ (right), and with $Q=1$ (top), $Q=2$ (mid), $Q=3$ (bottom row). The left subfigure in each panel shows $|\mathbf{a}^H \mathbf{g}_Q|^2$ for each $i^{th}(i=1, \dots, F)$ band, and the right subfigure shows their average along the horizontal axis, i.e., B_Q . Dotted black lines indicate the true DOAs, while dashed white lines denote the ghost DOAs computed using Eq. (16)

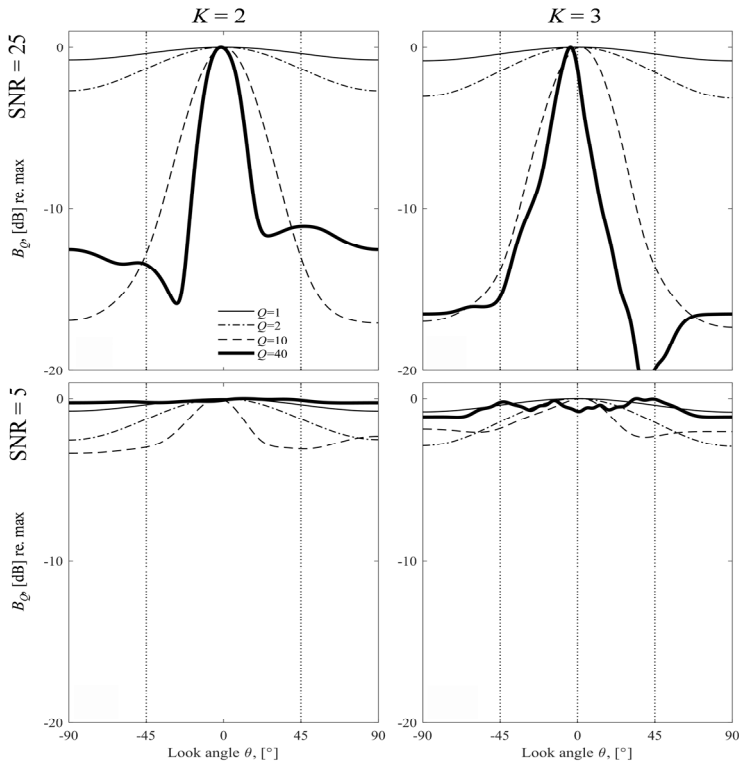
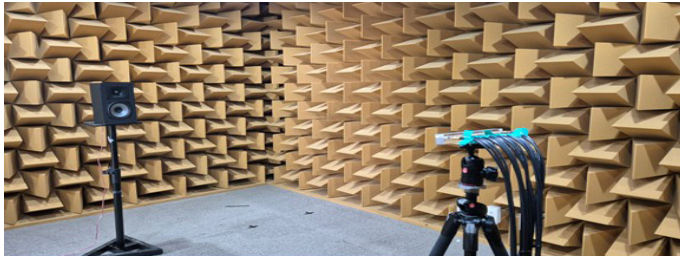


Fig. 7 Beampower for multi-DOAs with a low frequency bandwidth $[f_L, f_U] = [0.01 f_N, 0.04 f_N]$. Vertical dotted lines represent the true DOAs. All cases are with $L = 20$



(a) Placement of loudspeaker (source) and ULA (receivers) on the same horizontal plane



(b) Detailed view of ULA ($M = 20, d = 0.01$ m)

Fig. 8 Experimental setup in an anechoic chamber

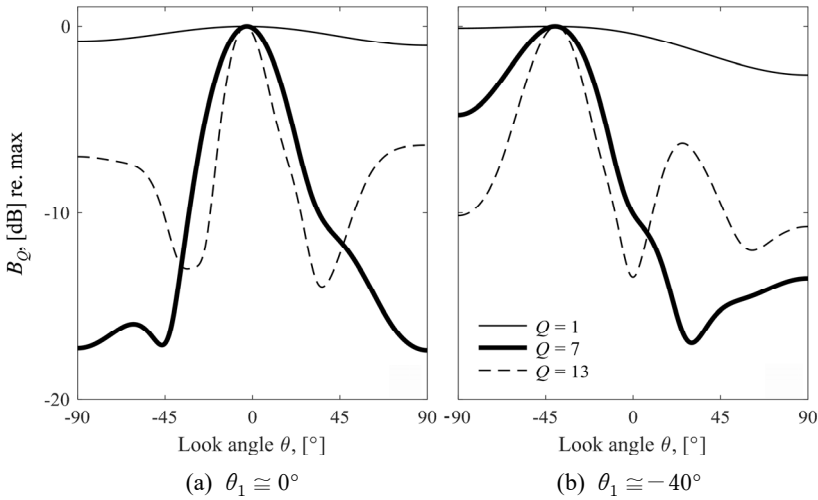


Fig. 9 Results of the single DOA experiment

해당 무향실은 썬치 끝단 사이의 내부 유효공간이 약 34.7 m^3 (폭 $4.24 \text{ m} \times$ 깊이 $3.67 \text{ m} \times$ 높이 2.23 m)이며, 250 Hz 이상의 주파수에서 자유음장 조건을 제공한다.

저주파 핑크 노이즈를 송출하는 스피커는 배열과 동일한 수평면상에서 배열 중심으로부터 3 m 이격된 위치에 설치되었다(Fig. 8(a)). 참고로, 실험에 사용한 센서배열은 시뮬레이션과 동일하다($d = 0.01 \text{ m}$, $M = 20$, microphone: SISPIA HJ06)(Fig. 8(b)). 핑크 노이즈 신호 대역은 $20 \text{ Hz} \sim 1 \text{ kHz}$ 이며, 배열 중심 위치에서의 음압레벨은 약 75 dB SPL 로 측정되었다.

이상과 같은 조건에서 다음 두 가지 경우에 대해 실험을 수행하였다. 첫 번째는 스피커가 배열을 정면으로 향하도록 배치한 경우($\theta_1 \approx 0^\circ$), 두 번째는 스피커가 $\theta_1 \approx -40^\circ$ 방향을 향하도록 배치한 경우이다. 20 kHz 의 샘플링 주파수(신호수집장치: NI-9234)로 마이크로폰 신호를 취득하였고, 스냅샷 당 2048 샘플수로 FFT 변환하였다. 후처리를 위한 나머지 설정은 3.1절에서 기술한 내용과 동일하다. 즉, 주파수 대역폭은, $[f_L, f_U] = [170 \text{ Hz}(= 0.01f_N), 680 \text{ Hz}(= 0.04f_N)]$ 스냅샷 수는 $L = 20$ 이다.

Fig. 9(a)는 정면 방향($\theta_1 \approx 0^\circ$)에서의 빔파워를 보이고 있다. $Q = 1$ 인 CBF의 경우, 평탄한 빔 형태로 인해(낮은 해상도로 인해) 도래각 파악이 어렵다. 3.1절에서 설명한 바와 같이, gFS 해석에서는 잡음의 영향으로 인해 Q 를 최대차수인 40 까지 증가시키는 것은 적절하지 않다. 평면파 가정과 실제 파형간의 불

일치, 무향실 내 음파반사 등 다양한 요인이 잡음에 기여하는 것으로 판단된다. 몇 회의 시행착오를 통해 낮은 부엽 수준과 함께 원하는 도래각 성분을 식별할 수 있는 Q 값을 7 로 선정하였다. 실제 적용에서는 Q 를 점진적으로 증가시키면서, 부엽이 뚜렷하게 나타나기 직전의 값을 선택하는 것이 gFS에 대한 실용적 접근이라 할 수 있다. 하단에 $\theta_1 \approx -40^\circ$ 의 결과를 도시하였고, 측면입사에 가까운 도래각 조건으로 인해 빔폭이 약간 두꺼워지는 점을 제외하면 상단의 결과와 유사한 특성을 보인다.

4. 결 론

신호과장이 배열크기에 비해 매우 큰 저주파 신호에 대해 고해상도 빔포밍을 구현하는 것은 대단히 어려운 문제이다. 이를 위해, 이 논문에서는 Q 차 주파수합 자기곱 g_Q 를 활용한 일반화된 주파수합 빔포밍(gFS) 기법을 제안하였다.

Q 값은 합주파수(f_F)가 배열의 공간 나이퀴스트 주파수 이하가 되도록 설정되어야 하나, 잡음의 존재는 Q 의 이론적 최대값까지 증가시키는 데 제약요인이 된다. 또한, 다중 도래각 상황에서 교차항에 의한 허위 도래각은 실 도래각 범위 내에 존재하므로 단순한 주파수 평균만으로는 억제할 수 없음을 해석적으로 설명하였다. 이처럼 고잡음/다중 도래각 환경에 대한 제약이 따르지만, 제안된 기법은 단일 저주파 음원에

대한 빔포밍 해상도를 높일 수 있는 유의미한 대안으로 평가된다.

후 기

이 논문은 2025년~2026년도 국립창원대학교 자율연구과제 연구비 지원으로 수행된 연구결과임.

References

(1) Gerstoft, P., Mecklenbräuker, C. F., Seong, W. and Bianco, M., 2018, Introduction to Compressive Sensing in Acoustics, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 143, No. 6, pp. 3731~3736.

(2) Krim, H. and Viberg, M., 1996, Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 13, No. 4, pp. 67~94.

(3) Van Trees, H., 2002, Arrays and Spatial Filters, in *Optimum Array Processing : Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Hoboken, John Wiley & Sons, Chapter 2, NJ, United States, pp. 17~89.

(4) Jeon, J. Y., Lee, P. J. and Sato, S.-I., 2009, Use of the Standard Rubber Ball as an Impact Source with Heavyweight Concrete Floors, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 126, No. 1, pp. 167~178.

(5) Širović, A., Hildebrand, J. A. and Wiggins, S. M., 2007, Blue and Fin Whale Call Source Levels and Propagation Range in the Southern Ocean, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 122, No. 2, pp. 1208~1215.

(6) Lee, J.-H., Park, H.-G., Kim, J.-H., Lee, K.-J. and Seo, J.-S., 2014, Reduction of Propeller Cavitation Induced Hull Exciting Pressure by a Reflected Wave from Air-bubble Layer, *Ocean Engineering*, Vol. 77, pp. 23~32.

(7) Lee, J. and Lee, K., 2018, Balloon for Reducing Propeller Cavitation Induced Hull Excitation, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 28, No. 1, pp. 39~49.

(8) Lee, J.-H. and Lee, K.-J., 2019, Multi-balloons Design for Suppressing Propeller BPF Induced Hull-excitation at Multi-frequencies, *Transactions of the Korean*

Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 29, No. 5, pp. 592~599.

(9) Schmidt, R., 1986, Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, No. 3, pp. 276~280.

(10) Capon, J., 1969, High-resolution Frequency-wave-number Spectrum Analysis, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 57, No. 8, pp. 1408~1418.

(11) Xenaki, A., Gerstoft, P. and Mosegaard, K., 2014, Compressive Beamforming, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 136, No. 1, pp. 260~271.

(12) Gerstoft, P., Xenaki, A. and Mecklenbräuker, C. F., 2015, Multiple and Single Snapshot Compressive Beamforming, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 138, No. 4, pp. 2003~2014.

(13) Abadi, S. H., Haworth, K. J., Mercado-Shekhar, K. P. and Dowling, D. R., 2018, Frequency-sum Beamforming for Passive Cavitation Imaging, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 144, No. 1, pp. 198~209.

(14) Abadi, S. H., Song, H. C. and Dowling, D. R., 2012, Broadband Sparse-array Blind Deconvolution Using Frequency-difference Beamforming, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 132, No. 5, pp. 3018~3029.

(15) Douglass, A. S., Song, H. C. and Dowling, D. R., 2017, Performance Comparisons of Frequency-difference and Conventional Beamforming, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 142, No. 3, pp. 1663~1673.

(16) Douglass, A. S. and Dowling, D. R., 2019, Frequency-difference Beamforming in the Presence of Strong Random Scattering, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 146, No. 1, pp. 122~134.

(17) Xie, L., Sun, C. and Tian, J., 2020, Deconvolved Frequency-difference Beamforming for a Linear Array, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 148, No. 6, EL440-EL446.

(18) Worthmann, B. M., Song, H. C. and Dowling, D. R., 2015, High Frequency Source Localization in a Shallow Ocean Sound Channel Using Frequency Difference Matched Field Processing, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 138,

No. 6, pp. 3549~3562.

(19) Geroski, D. J. and Dowling, D. R., 2019, Long-range Frequency-difference Source Localization in the Philippine Sea, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 146, No. 6, pp. 4727~4739.

(20) Worthmann, B. M. and Dowling, D. R., 2017, The Frequency-difference and Frequency-sum Acoustic-field Autoproducts, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 141, No. 6, pp. 4579~4590.

(21) Lee, J.-H., Park, Y. and Gerstoft, P., 2024,

Direction of Arrival Estimation Using Compressive Frequency Difference Beamforming, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 34, No. 4, pp. 402~410.

(22) Park, Y., Gerstoft, P. and Lee, J., 2022, Difference-frequency MUSIC for DOAs, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 29, pp. 2612~2616.

(23) Stanley, R. P., 1997, *Enumerative Combinatorics*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.