Check for updates

Trans. Korean Soc. Noise Vib. Eng., 35(4) : 409~416, 2025
https://doi.org/10.5050/KSNVE.2025.35.4.409

한국소음진동공학회논문집 제 35 권 제 4호, pp. 409~416, 2025
ISSN 1598-2785(Print), ISSN 2287-5476(Online)

오목 멤브레인의 전 주파수 대역 고유치 추출을 위한 3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법 개발: 제1부(이론 정립과 검증)

Development of Non-dimensional Dynamic Influence Function Method Based on Three-domain Decomposition Approach for Eigenvalue Extraction over Entire Frequency Range of Concave Membranes: Part 1(Theoretical Formulation and Verification)

강 상 욱†
Sang Wook Kang†

(Received July 10, 2025 ; Revised July 15, 2025 ; Accepted July 23, 2025)

Key Words : NDIF Method(무차원동영향함수법), Concave Membrane(오목 멤브레인), Eigenvalue(고유치), Low-frequency Divergence(저주파수 발산), Three-domain Decomposition Approach(3영역 분할법)

ABSTRACT

This study developed a novel eigenvalue extraction method for geometrically complex concave membranes using the non-dimensional dynamic influence function (NDIF) method based on a three-domain decomposition approach. Contrary to conventional NDIF formulations, which suffer from numerical instability and failure to extract lower-order eigenvalues as the number of boundary nodes increases, the proposed method introduces an improved system matrix formulation that eliminates the need for matrix inversion at the local level. This enhancement fundamentally resolves the low-frequency divergence issue inherent in previous formulations. The validity and numerical accuracy of the proposed method were verified through a comparative analysis with exact solutions and FEM results for a rectangular membrane divided into three domains. The results confirmed that the proposed method can accurately extract eigenvalues across the entire frequency range, including the lower-order modes, regardless of boundary node density. This study focused on the theoretical formulation and validation using a relatively simple membrane model; application to more complex geometries will be presented in Part 2.

1. 서 론

복잡한 형상을 가지는 얇은 구조물의 진동 특성을 정밀하게 해석하는 것은 구조역학 및 음향공학 분야에서 지속적인 관심을 받아온 핵심 연구 주제이다. 특히, 오목 형상의 멤브레인은 비정형 경계, 다중 곡률, 경계 조건의 불연속성 등으로 인해 고유치(eigenvalue) 해석이 까다로운 대표적인 구조물 중 하나로 알려져 있다. 이러한 구조물에 대해 저차부터 고차까지 전 주파수 대역의 고유치를 안정적이고 정확하게 추출할 수 있는 해석 기법의 개발은 이론적 측면뿐만 아니라 실무 공학적 응용에서도 중요한 의미를 지닌다.

NDIF(non-dimensional dynamic influence function)

† Corresponding Author ; Member, Hansung University, Professor
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

‡ Recommended by Editor Chan Jung Kim
ⓒ The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

법은 상대적으로 적은 계산량으로도 높은 정확도를 달성할 수 있는 진동 해석 기법으로, 오목 멤브레인과 같은 복잡한 구조물에 대한 적용 가능성 측면에서 주목받아 왔다. 이를 오목 멤브레인의 고유치 해석에 적용하기 위한 시도로서, 2영역 및 3영역 분할법 기반 NDIF 법 이론이 초기 연구를 통해 제안된 바 있다[1]. 그러나 이들 이론은 경계 절점(node) 수가 증가할수록 시스템 행렬의 수치적 안정성이 저하되고, 결과적으로 저차 고유치가 추출되지 않는 한계를 보이는 문제가 확인되었다.

이러한 문제를 해결하고자, 후속 연구에서는 절점 수에 관계없이 저차 고유치까지 안정적으로 추출 가능한 2영역 분할법 기반 NDIF 이론이 개발되었으며[2,3], 이를 통해 단순 형상의 오목 멤브레인에 대해서는 전 주파수 대역 고유치 해석이 가능함을 수치적으로 검증하였다. 그러나 형상이 더욱 복잡해지는 경우, 두 개의 영역만으로 구조물을 분할하는 방식은 경계 조건의 연속성 확보 및 시스템 행렬의 수치적 안정성 유지에 있어 여전히 제약을 가진다.

이에 따라 이 연구에서는 복잡한 형상을 가진 오목 멤브레인에 대해 세 개의 볼록 영역으로 분할하는 3영역 분할법 기반 NDIF 이론을 새롭게 정립하고자 한다. 제안하는 이론은 절점 수가 증가하는 상황에서도 저차 고유치의 추출이 가능하도록 시스템 행렬 구성 방식과 판별식 계산 기법을 개선한 것이며, 기존 이론이 지닌 저주파수 발산 문제를 이론적으로 규명하고 이를 해결하는 데 중점을 둔다. 이 논문에서는 제안된 이론을 단순 형상의 멤브레인 예제에 적용하여 엄밀해 및 FEM 해석 결과와 비교함으로써 이론의 타당성과 수치적 정확성을 검증하며, 보다 복잡한 형상을 가진 오목 멤브레인에 대한 해석은 후속 논문 제2부에서 다룰 예정이다.

2. 3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법

2.1 3영역 분할법

3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법(NDIF법)은 오목한 형상의 멤브레인을 고정밀도로 해석하기 위해 개발된 기법으로, 해석 대상의 전체 영역을 세 개의 볼록 영역으로 분할하여 해석하는 방법론을 채택한다. 이 연구에서는 Fig. 1과 같이 오목 형상 멤브레인을 세 개의 볼록 영역 D_1, D_2, D_3로 분할하며, 각각의 영역은 외부 경계(실선)와 접촉 경계(점선)로 둘러싸여 있다 가정한다.

Fig. 1과 같이 볼록 영역 D_1의 경계는 외부 경계(실선) Γ_1과 접촉 경계(점선) $\Gamma_a+\Gamma_b$로 구성된다. 여기서 외부 경계는 변위 또는 기울기가 경계조건으로 주어지는 경계를 의미하며, 접촉 경계는 분할된 다른 볼록 영역과 접촉되어 있는 경계를 의미한다. 경계 Γ_1, Γ_a, Γ_b는 각각 절점 $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, …, $P_{N_1}^{(1)}$, $P_1^{(a)}$, $P_2^{(a)}$, …, $P_{N_a}^{(a)}$, $P_1^{(b)}, P_2^{(b)}, \cdots, P_{N_b}^{(b)}$로 이산화된다. 마찬가지 방식으로, 두 번째 볼록 영역 D_2의 경계는 외부 경계 Γ_2과 접촉 경계 Γ_a로 구성된다. 경계 Γ_2는 $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}$, …, $P_{N_2}^{(2)}$로 이산화된다. 마지막으로 세 번째 볼록 영역 D_3의 경계는 외부 경계 Γ_3과 접촉 경계 Γ_b로 구성된다. Γ_3는 절점 $P_1^{(3)}, P_2^{(3)}$, …, $P_{N_3}^{(3)}$로 이산화된다.

2.2 영역 내부의 변위 함수 설정

분할된 영역 D_1 내부의 변위 $W_1(\mathbf{r})$는 해당 영역을 둘러싼 외부 경계 Γ_1와 접촉 경계 $\Gamma_a+\Gamma_b$에 놓인 절

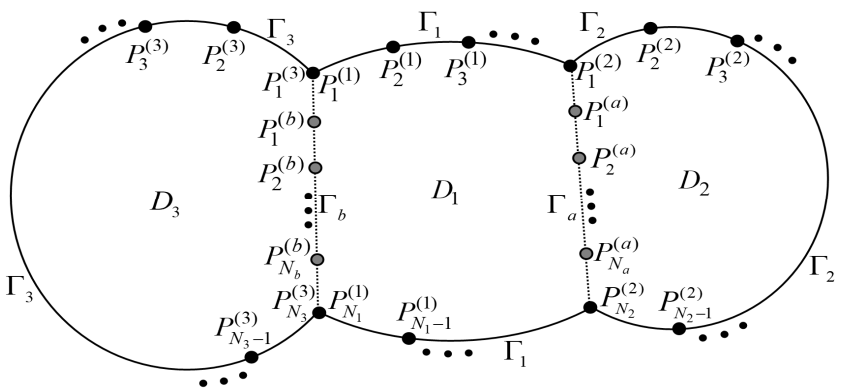

Fig. 1 Arbitrarily shaped concave membrane divided into three convex domains D_1, D_2, and D_3

점들에서 정의된 무차원동영향함수들의 선형 결합 형태로 식 (1)과 같이 가정된다[1].

$$W_1(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_1} A_i^{(1)} J_0\left(\wedge|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i^{(1)}|\right) + \sum_{j=1}^{N_a} A_j^{(a)} J_0\left(\wedge|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^{(a)}|\right) + \sum_{j=1}^{N_b} A_j^{(b)} J_0\left(\wedge|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^{(b)}|\right) \quad (1)$$

여기서 벡터 $\mathbf{r}$은 영역 내부 한점에 대한 위치 벡터, $\wedge$는 주파수 파라미터, $J_0(\cdots)$는 멤브레인의 무차원동영향함수(제1종 0차 베셀함수)이다. $\mathbf{r}_i^{(1)}$은 Γ_1에서 i번째 절점에 대한 위치벡터, $\mathbf{r}_j^{(a)}$은 Γ_a에서 j번째 절점에 대한 위치벡터를 나타낸다. 또한, $A_i^{(1)}$, $A_j^{(a)}$, $A_j^{(b)}$는 해당 절점에서 정의된 무차원동영향함수의 기여도 계수이다.

분할된 영역 D_2와 D_3의 내부 변위도 외부 경계와 접촉 경계에 놓인 절점에 대해 정의된 무차원동영향함수들의 선형 결합으로 식 (2)와 식 (3)과 같이 각각 가정된다.

$$W_2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_2} B_i^{(2)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i^{(2)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_a} B_j^{(a)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^{(a)}\right|) \quad (2)$$

$$W_3(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_3} C_i^{(3)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i^{(3)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_b} C_j^{(c)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^{(b)}\right|) \quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에 주어진 변수들에 대한 설명은 식 (1)에 대한 설명을 참고하면 알 수 있기에 생략한다.

2.3 영역별 외부 변위와 접촉 변위 가정

영역 D_1의 외부 경계 절점 $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, …, $P_{N_1}^{(1)}$에 부여된 변위 조건은 식 (4)와 같이 가정한다.

$$W_1(\mathbf{r}_k^{(1)}) = U_k^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots, N_1 \quad (4)$$

여기서 $U_k^{(1)}$는 외부 경계 Γ_1에 놓인 k번째 절점 $P_k^{(1)}$에 부여된 변위를 의미한다. 마찬가지 방식으로 영역 D_2와 D_3의 외부 경계 Γ_2와 Γ_3에 놓인 절점에 부여된 변위 경계 조건은 식 (5), 식 (6)과 같이 각각 가정한다.

$$W_2(\mathbf{r}_k^{(2)}) = U_k^{(2)},\ k = 1, 2, \ldots, N_2 \quad (5)$$

$$W_3(\mathbf{r}_k^{(3)}) = U_k^{(3)},\ k = 1, 2, \ldots, N_3 \quad (6)$$

여기서 $U_k^{(2)}$와 $U_k^{(3)}$는 외부 경계 Γ_2와 Γ_3 놓인 절점 $P_k^{(2)}$와 $P_k^{(3)}$에 부여된 변위를 각각 의미한다.

영역 D_1의 접촉 경계 Γ_a의 절점 $P_1^{(a)}$, $P_2^{(a)}$, … , $P_{N_a}^{(a)}$과 Γ_b의 절점 $P_1^{(b)}$, $P_2^{(b)}$, … , $P_{N_b}^{(b)}$에서의 변위는 식 (7), 식 (8)과 같이 각각 가정한다.

$$W_1(\mathbf{r}_m^{(a)}) = U_m^{(a)},\ m = 1, 2, \ldots, N_a \quad (7)$$

$$W_1(\mathbf{r}_m^{(b)}) = U_m^{(b)},\ m = 1, 2, \ldots, N_b \quad (8)$$

여기서 $U_m^{(a)}$와 $U_m^{(b)}$는 각각 접촉 경계 Γ_a와 Γ_b에 놓인 m번째 절점에서의 변위를 의미한다.

한편, 영역 D_2의 관점에서 접촉 경계 Γ_a의 절점에서의 변위는 식 (9)와 같이 가정한다.

$$W_2(\mathbf{r}_m^{(a)}) = U_m^{(a)},\ m = 1, 2, \ldots, N_a \quad (9)$$

마찬가지로, 영역 D_3의 관점에서 접촉 경계 Γ_b의 절점에서의 변위는 식 (10)과 같이 가정한다.

$$W_3(\mathbf{r}_m^{(b)}) = U_m^{(b)},\ m = 1, 2, \ldots, N_b \quad (10)$$

2.4 시스템 행렬 구성

영역 D_1의 내부 변위 식 (1)을 변위 경계 조건 식 (4)와 접촉 변위 식 (5), 식 (6)을 대입하면 식 (11)을 각각 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N_1} A_i^{(1)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_k^{(1)}-\mathbf{r}_i^{(1)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_a} A_j^{(a)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_k^{(1)}-\mathbf{r}_j^{(a)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_b} A_j^{(b)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_k^{(1)}-\mathbf{r}_j^{(b)}\right|) = U_k^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots, N_1 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} A_i^{(1)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(a)}-\mathbf{r}_i^{(1)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_a} A_j^{(a)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(a)}-\mathbf{r}_j^{(a)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_b} A_j^{(b)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(a)}-\mathbf{r}_j^{(b)}\right|) = U_m^{(a)},\ m = 1, 2, \ldots, N_a \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} A_i^{(1)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(b)}-\mathbf{r}_i^{(1)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_a} A_j^{(a)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(b)}-\mathbf{r}_j^{(a)}\right|) + \sum_{j=1}^{N_b} A_j^{(b)} J_0(\wedge\left|\mathbf{r}_m^{(b)}-\mathbf{r}_j^{(b)}\right|) = U_m^{(b)},\ m = 1, 2, \ldots, N_b \quad (13)$$

식 (11) ~ 식 (13)은 식 (14) ~ 식 (16)과 같이 행렬식으로 각각 표현할 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{11}\mathbf{A}_1+\mathbf{SM}_{1a}\mathbf{A}_a+\mathbf{SM}_{1b}\mathbf{A}_b=\mathbf{U}_1 \tag{14}$$

$$\mathbf{SM}_{a1}\mathbf{A}_1+\mathbf{SM}_{aa}\mathbf{A}_a+\mathbf{SM}_{ab}\mathbf{A}_b=\mathbf{U}_a \tag{15}$$

$$\mathbf{SM}_{b1}\mathbf{A}_1+\mathbf{SM}_{ba}\mathbf{A}_a+\mathbf{SM}_{bb}\mathbf{A}_b=\mathbf{U}_b \tag{16}$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{\alpha\beta}$의 p번째 행, q번째 열 성분은 $J_0(\wedge|\mathbf{r}_p^{(\alpha)}-\mathbf{r}_q^{(\beta)}|)$이고, 기여도 벡터 $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_a$, $\mathbf{A}_b$의 성분은 각각 $A_i^{(1)}$, $A_j^{(a)}$, $A_j^{(b)}$로 주어지며, 변위 벡터 $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_b$의 성분은 각각 $U_k^{(1)}$, $U_m^{(a)}$, $U_m^{(b)}$로 주어진다.

영역 D_2의 내부 변위 식 (2)를 변위 경계 조건 식 (5)와 접촉 변위 식 (9)에 대입한 후 행렬식으로 변환하면 식 (17), 식 (18)을 각각 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{22}\mathbf{B}_2+\mathbf{SM}_{2a}\mathbf{B}_a=\mathbf{U}_2 \tag{17}$$

$$\mathbf{SM}_{a2}\mathbf{B}_2+\mathbf{SM}_{aa}\mathbf{B}_a=\mathbf{U}_a \tag{18}$$

마찬가지로 영역 D_3의 내부 변위 식 (3)을 변위 경계 조건 식 (6)과 접촉 변위 식 (10)에 대입한 후 행렬식으로 변환하면 식 (19), 식 (20)을 각각 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{33}\mathbf{C}_3+\mathbf{SM}_{3b}\mathbf{C}_b=\mathbf{U}_3 \tag{19}$$

$$\mathbf{SM}_{b3}\mathbf{C}_3+\mathbf{SM}_{bb}\mathbf{C}_b=\mathbf{U}_b \tag{20}$$

Fig. 1에서와 같이 접촉 경계 Γ_a는 D_1과 D_2의 공통 접촉 경계이므로, 식 (15)와 식 (18)이 같다는 변위 연속 조건을 고려하면 식 (21)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{SM}_{a1}\mathbf{A}_1+\mathbf{SM}_{aa}\mathbf{A}_a+\mathbf{SM}_{ab}\mathbf{A}_b\\&=\mathbf{SM}_{a2}\mathbf{B}_2+\mathbf{SM}_{aa}\mathbf{B}_a\end{aligned} \tag{21}$$

또한, 접촉 경계 Γ_b는 D_1과 D_3의 공통 접촉 경계이므로, 식 (16)과 식 (20)이 같다는 변위 연속 조건을 고려하면 식 (22)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{SM}_{b1}\mathbf{A}_1+\mathbf{SM}_{ba}\mathbf{A}_a+\mathbf{SM}_{bb}\mathbf{A}_b\\&=\mathbf{SM}_{b3}\mathbf{C}_3+\mathbf{SM}_{bb}\mathbf{C}_b\end{aligned} \tag{22}$$

다음으로, 식 (1) ~ 식 (3)을 접촉 경계 Γ_a의 법선 방향으로 미분을 한 후, Γ_a에서의 기울기 연속 조건을 고려하면 식 (23)의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{PM}_{a1}\mathbf{A}_1+\mathbf{PM}_{aa}\mathbf{A}_a+\mathbf{PM}_{ab}\mathbf{A}_b\\&=\mathbf{PM}_{a2}\mathbf{A}_2+\mathbf{PM}_{aa}\mathbf{A}_a\end{aligned} \tag{23}$$

마찬가지 방식으로, Γ_b에서의 기울기 연속 조건을 고려하면 식 (24)의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{PM}_{b1}\mathbf{A}_1+\mathbf{PM}_{ba}\mathbf{A}_a+\mathbf{PM}_{bb}\mathbf{A}_b\\&=\mathbf{PM}_{b3}\mathbf{A}_3+\mathbf{PM}_{bb}\mathbf{A}_b\end{aligned} \tag{24}$$

여기서 $\mathbf{PM}_{\alpha\beta}=\partial\mathbf{SM}_{\alpha\beta}/\partial n$을 의미하며, 시스템 행렬 $\mathbf{PM}_{\alpha\beta}$의 p번째 행, q번째 열 성분은 $\partial J_0(\wedge|\mathbf{r}_p^{(\alpha)}-\mathbf{r}_q^{(\beta)}|)/\partial n$이다.

2.5 최종 시스템 행렬 구성 및 고유치 추출 판별식

2.4절에서 유도한 7개의 시스템 행렬식 식 (14), 식 (17), 식 (19), 식 (21) ~ 식 (24)로부터 최종 시스템 행렬을 추출하기 위해 이전 연구와 마찬가지로 행렬 축약법을 먼저 이용하였다[2]. 고정단 경계 조건 $\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_2=\mathbf{U}_3=0$을 식 (14), 식 (17), 식 (19)에 적용하면 식 (25) ~ 식 (27)을 각각 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A}_1=-\mathbf{SM}_{11}^{-1}\mathbf{SM}_{1a}\mathbf{A}_a--\mathbf{SM}_{11}^{-1}\mathbf{SM}_{1b}\mathbf{A}_b \tag{25}$$

$$\mathbf{B}_2=-\mathbf{SM}_{22}^{-1}\mathbf{SM}_{2a}\mathbf{B}_a \tag{26}$$

$$\mathbf{C}_3=-\mathbf{SM}_{33}^{-1}\mathbf{SM}_{3b}\mathbf{C}_b \tag{27}$$

식 (25) ~ 식 (27)을 식 (21) ~ 식 (24)에 대입하여 정리하면 식 (28)과 같이 축약된 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_r(\wedge)\mathbf{D}_r=\mathbf{0} \tag{28}$$

여기서 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$와 $\mathbf{D}_r$은 해석 대상 오목 멤브레인에 대한 최종 축약 시스템 행렬과 축약 기여도 벡터를 의미하며 식 (29)의 식들에 의해 주어진다.

$$\mathbf{SM}_r(\lambda)=\begin{bmatrix}\mathbf{SM}_r^{11} & \mathbf{SM}_r^{12} & \mathbf{SM}_r^{12} & 0\\ \mathbf{SM}_r^{21} & \mathbf{SM}_r^{21} & 0 & \mathbf{SM}_r^{24}\\ \mathbf{SM}_r^{31} & \mathbf{SM}_r^{32} & \mathbf{SM}_r^{33} & 0\\ \mathbf{SM}_r^{41} & \mathbf{SM}_r^{42} & 0 & \mathbf{SM}_r^{44}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_r=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_a & \mathbf{C}_b\end{bmatrix}^T \tag{29}$$

여기서 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$의 성분은 식 (30) ~ 식 (41)과 같다.

$$\mathbf{SM}_r^{11} = \mathbf{SM}_{aa} - \mathbf{SM}_{a1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1a} \tag{30}$$

$$\mathbf{SM}_r^{12} = \mathbf{SM}_{ab} - \mathbf{SM}_{a1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1b} \tag{31}$$

$$\mathbf{SM}_r^{13} = \mathbf{SM}_{a2}^{-1}\mathbf{SM}_{22}\mathbf{SM}_{2a} - \mathbf{SM}_{aa} \tag{32}$$

$$\mathbf{SM}_r^{21} = \mathbf{SM}_{ba} - \mathbf{SM}_{b1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1a} \tag{33}$$

$$\mathbf{SM}_r^{22} = \mathbf{SM}_{bb} - \mathbf{SM}_{b1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1b} \tag{34}$$

$$\mathbf{SM}_r^{24} = \mathbf{SM}_{b3}^{-1}\mathbf{SM}_{33}\mathbf{SM}_{3b} - \mathbf{SM}_{bb} \tag{35}$$

$$\mathbf{SM}_r^{31} = \mathbf{PM}_{aa} - \mathbf{PM}_{a1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1a} \tag{36}$$

$$\mathbf{SM}_r^{12} = \mathbf{PM}_{ab} - \mathbf{PM}_{a1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1b} \tag{37}$$

$$\mathbf{SM}_r^{13} = \mathbf{PM}_{a2}^{-1}\mathbf{SM}_{22}\mathbf{SM}_{2a} - \mathbf{PM}_{aa} \tag{38}$$

$$\mathbf{SM}_r^{21} = \mathbf{PM}_{ba} - \mathbf{PM}_{b1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1a} \tag{39}$$

$$\mathbf{SM}_r^{22} = \mathbf{PM}_{bb} - \mathbf{PM}_{b1}^{-1}\mathbf{SM}_{11}\mathbf{SM}_{1b} \tag{40}$$

$$\mathbf{SM}_r^{24} = \mathbf{PM}_{b3}^{-1}\mathbf{SM}_{33}\mathbf{SM}_{3b} - \mathbf{PM}_{bb} \tag{41}$$

식 (28)로부터 고유치 추출 판별식 식 (29)를 얻을 수 있으며 식 (42)의 해가 고유치에 해당된다.

$$\det(\mathbf{SM}_r(\wedge)) = 0 \tag{42}$$

여기서 축약된 최종 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$은 정사각 행렬이며 그 크기는 접촉 경계 절점 개수의 두배인 $2(n_a + n_b)$에 불과하다.

3. 전 주파수 대역 고유치 추출 방안

3.1 제안된 이론 검증

식 (42)가 전 주파수 대역에서 정확한 고유치를 제공하는지를 확인하기 위해 엄밀해를 가지는 직사각형 멤브레인이 고려된다. Fig. 2(a), Fig. 2(b)는 의도적으로 3개 영역으로 분할된 가로 1.2 m, 세로 0.9 m 직사각 멤브레인을 보여주며, 이들은 각각 40개와 52개의 절점으로 이산화되었다. 식 (42)를 이용하여 이들 멤브레인에 대한 판별식 곡선을 구하면 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서 40 절점 곡선과 52 절점 곡선 둘 다 저주파수 구간에서 시스템 행렬이 발산하여 저차 고유치들이 추출되지 않음을 확인할 수 있다. Fig. 3의 두 판별식 곡선으로부터 추출된 고유치들은 Table 1에 요약되었다[5].

Table 1에서, 40 절점의 경우 1차 고유치가, 52 절

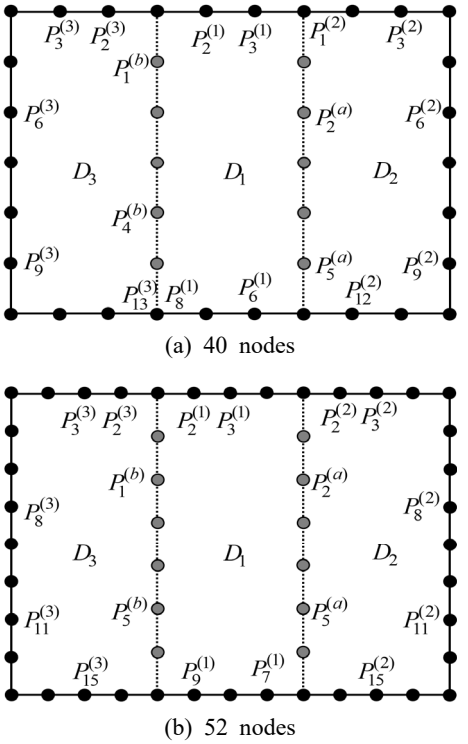

Fig. 2 Rectangular membranes divided into 3 domains and discretized with 40 and 52 nodes, respectively

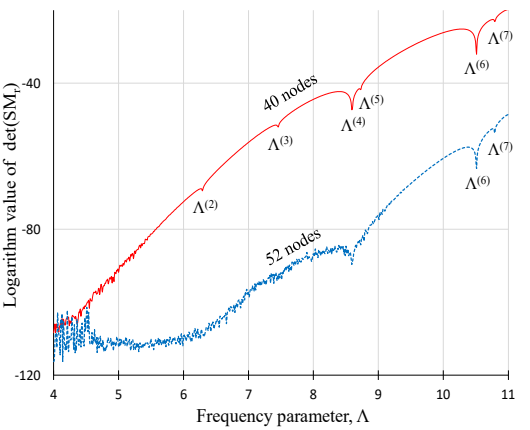

Fig. 3 Determinant curves of the rectangular membrane for 40 and 52 nodes plotted by Eq. (42)

점의 경 1차~5차 고유치가 미추출되었음이 확인된다. 한편, 성공적으로 추출된 고유치들은 엄밀해와 정확히 일치했음을 확인할 수 있는데, 1089 절점을 사용한 FEM보다 NDIF법이 훨씬 정확하다고 말할 수 있다.

이 논문에서는 절점의 개수가 증가하면 저차 고유치 미추출 문제가 발생하는 식 (42)의 약점을 개선하는 방안이 제안된다. 그 첫 번째 과정이 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$곡선의 판별식을 계산하기 위해 이전 논문의 연구 결과를 확장하여 식 (43)을 이용하는 것이다[2].

$$\det(\mathbf{SM}_r(\wedge)) = \prod_{k=1}^{R(\wedge)} \Omega_k(\wedge) \tag{43}$$

여기서 $R(\wedge)$는 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$의 랭크(rank)이며 주파수 파라미터의 함수이다. 그리고 $\Omega_k(\wedge)$는 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$에 대한 대수 고유치 문제에서의 k번째 고유치를 의미한다[2]. 한편, 식 (43)이 유용성을 가지려면 $R(\wedge)$가 상수가 아니어야 한다[2]. 그래서 Fig. 2의 사각 멤브레인의 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$에 대한 $R(\wedge)$ 곡선을 Fig. 4와 같이 구해보았다. Fig. 4에서 40 절점과 52 절점 두 경우 모두 랭크가 20과 24로 각각 일정하게 유지됨이 확인되며, 이러한 사실로부터 $\mathbf{SM}_r(\wedge)$의 판별식 값을 구할 때 식 (43)은 유용하지 않다고 결론지을 수 있다.

3.2 저차 고유치 추출을 위한 새로운 방안

이 연구에서는 식 (43)을 사용하기 위해 최종 시스템 행렬을 새로운 방법으로 구하는 방안을 시도한다. 이 방법의 핵심은 시스템 행렬을 구성할 때 로컬 시스템 행렬을 역행렬화시키는 과정을 배제하는 것이다. 그래서, 식 (14), 식 (17), 식 (19), 식 (21)~식 (24)을 변형하지 않고 그대로 하나의 행렬식으로 나타내는 방법을 채택한다. 그러면 식 (44)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{TM}(\wedge)\,\mathbf{D} = \mathbf{U} \tag{44}$$

여기서 $\mathbf{TM}(\wedge)$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{U}$는 해석 대상 오목 멤브레인에 대한 최종 시스템 행렬, 기여도 벡터, 외각 경계 변위 벡터를 의미하며, 식 (45)~식 (47)에 의해 주어진다.

$$\mathbf{TM}(\wedge) = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{1a} & \mathbf{SM}_{1b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{2a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{3b} \\ \mathbf{SM}_{a1} & -\mathbf{SM}_{a2} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{aa} & \mathbf{SM}_{ab} & -\mathbf{SM}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{SM}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{SM}_{b3} & \mathbf{SM}_{ba} & \mathbf{SM}_{bb} & \mathbf{0} & -\mathbf{SM}_{bb} \\ \mathbf{PM}_{a1} & -\mathbf{PM}_{a2} & \mathbf{0} & \mathbf{PM}_{aa} & \mathbf{PM}_{ab} & -\mathbf{PM}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{PM}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{PM}_{b3} & \mathbf{PM}_{ba} & \mathbf{PM}_{bb} & \mathbf{0} & -\mathbf{PM}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{A}_a \\ \mathbf{A}_b \\ \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{45, 46, 47}$$

Table 1 Eigenvalues of the rectangular membrane obtained by NDIF method (Eq. (42)), the exact solution, and FEM (ANSYS)

	NDIF method (Eq. (42))		Exact solution	FEM (1089 nodes)
	40 nodes	52 nodes		
$\Lambda^{(1)}$	None	None	4.363	4.365
$\Lambda^{(2)}$	6.293	None	6.293	6.301
$\Lambda^{(3)}$	7.456	None	7.456	7.467
$\Lambda^{(4)}$	8.595	None	8.595	8.621
$\Lambda^{(5)}$	8.727	None	8.727	8.741
$\Lambda^{(6)}$	10.508	10.508	10.508	10.537
$\Lambda^{(7)}$	10.794	10.794	10.794	10.831

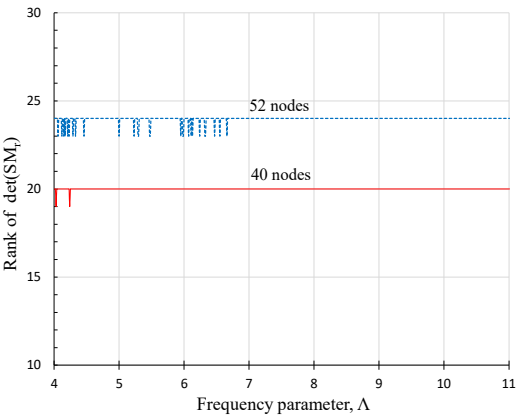

Fig. 4 Rank of $\mathbf{SM}_r$ for the rectangular membrane discretized with 40 and 52 nodes as shown in Fig. 2

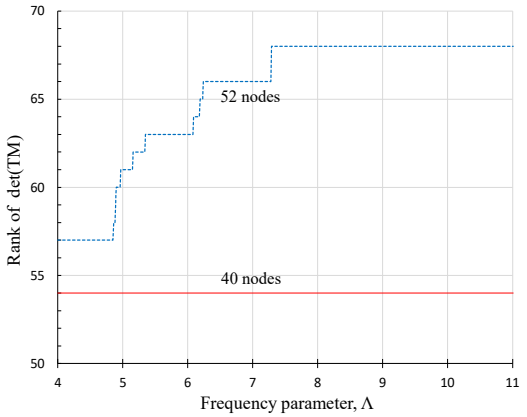

Fig. 5 Rank of $\mathbf{TM}$ for the rectangular membrane discretized with 40 and 52 nodes as shown in Fig. 2

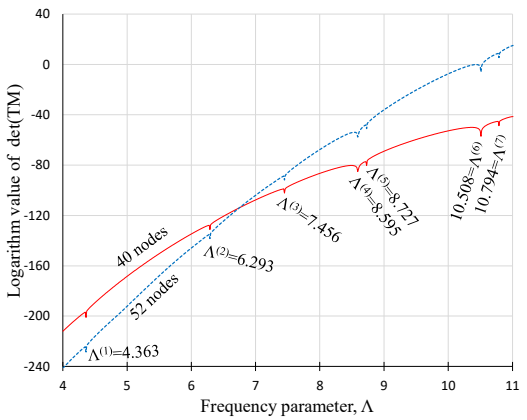

Fig. 6 Determinant curves of the rectangular membrane for 40 and 52 nodes plotted by Eq. (50)

해석 대상 오목 멤브레인이 고정단 경계를 가진다면 $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_3 = \mathbf{0}$을 만족하므로 식 (44)는 식 (48)과 같이 된다.

$$\mathbf{TM}(\wedge)\,\mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{48}$$

식(48)에서 $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$을 만족하기 위해선 시스템 행렬의 판별식이 식 (49)와 같이 0이 되어야 한다.

$$\det(\mathbf{TM}(\wedge)) = 0 \tag{49}$$

해석 대상 오목 멤브레인의 고유치는 식 (49)를 만족하는 주파수 파라미터($\wedge$) 값으로부터 구할 수 있다. 이제 식 (49)의 판별식을 계산하기 위해 식 (43)에 식 (45)의 $\mathbf{TM}(\wedge)$을 대입하면 식 (50)과 같이 된다.

$$\det(\mathbf{TM}(\wedge)) = \prod_{k=1}^{R(\wedge)} \Omega_k(\wedge) \tag{50}$$

식 (50)의 유용성을 확인하기 위해 $\mathbf{TM}(\wedge)$의 랭크 곡선을 그려 본 결과 주파수 파라미터에 따라 랭크 값의 변화가 있음이 Fig. 5와 같이 확인되었다. 마지막으로 식 (50)을 이용하여 판별식 곡선을 그린 후 평탄화 과정을 거치면 Fig. 6과 같은 최종 판별식 곡선을 얻을 수 있다[2~4]. 참고로 평탄화 과정에 대한 구체적인 연구 결과는 논문 2부에서 제시된다.

Fig. 6의 판별식 곡선으로부터 얻은 고유치들은 판별식 곡선에 직접 표기하였다. 이들 값들을 살펴 보면, 저주파수 영역을 포함한 전 주파수 대역에서 모든 고유치들이 추출되었음이 확인되며, Table 1의 엄밀해와 정확히 일치함도 확인된다.

4. 결 론

이 연구에서는 오목 형상의 복잡한 멤브레인을 세 개의 볼록 영역으로 분할하는 3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법을 새롭게 정립하였다. 기존 NDIF법이 절점 수 증가에 따라 저차 고유치 미추출 문제를 겪는 한계를 가지는 상황에서, 이 연구는 로컬 시스템 행렬의 역행렬화 과정을 제거한 새로운 시스템 행렬 구성 방식을 제안하였다. 더 나아가 저주파수 영역에서 시스템 행렬의 발산을 방지하기 위한 새로운 판별식 계산 기법도 제안하였다. 이를 통해 주파수 전 구간에서 시스템 행렬의 수치적 안정성을 확보함과 동시에 저주파수 영역에서도 안정적으로 고유치를 추출할 수 있는 해석 프레임워크를 구축하였다. 제안된 방법의 이론적 유효성은 직사각형 멤브레인에 대한 예제 연구를 통해 검증되었으며, FEM 및 엄밀해와의 비교 결과 매우 높은 일치도를 보였다. 이 논문은 복잡한 형상을 가지는 오목 멤브레인에 대해 기존 NDIF법의 한계를 극복할 수 있는 이론적 기반을 마련하였으며, 이를 통해 보다 넓은 범위의 공학적 문제에 적용 가능한 해석 기법으로 확장될 수 있음을 확인하였다. 후속 논문인 제2부에서는 이 연구에서 정립한 이론을 복잡한 형상을 가진 다양한 오목 멤브레인에 적용하여 그 실용성과 적용 가능성을 추가로 검증할 예정이다.

후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원 과제임.

References

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function, Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(2) Kang, S. W., 2024, Development of the NDIF Method based on the Sub-domain Method Overcoming the Non-extraction Problem of Low-order Eigenvalues for Concave Membranes: Part 1(theoretical formulation and verification), Transactions of the Korea Society of Mechanical Engineers, Vol. 34, No. 6, pp. 709~716.

(3) Kang, S. W., 2024, Development of the NDIF Method based on the Sub-domain Method Overcoming the Non-extraction Problem of Low-order Eigenvalues for Concave Membranes: Part 2(example studies and considerations), Transactions of the Korea Society of Mechanical Engineers, Vol. 34, No. 6, pp. 728~734.

(4) Kang, S. W., 2020, Lower-order and Higher-order Eigenmode Analyses of Arbitrarily Shaped Membranes Using Non-dimensional Dynamic Influence Function Method, Transactions of the Korea Society of Mechanical Engineers, Vol. 44, No. 12, pp. 971~977.

(5) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Litton Educational Publishing, NY, United States, p. 260.