

# 오목 멤브레인의 전 주파수 대역 고유치 추출을 위한 3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법 개발: 제2부(예제 연구 및 고찰)

## Development of Non-dimensional Dynamic Influence Function Method Based on Three-domain Decomposition Approach for Eigenvalue Extraction over Entire Frequency Range of Concave Membranes: Part 2(Example Studies and Discussion)

강 상 옥<sup>†</sup>  
Sang Wook Kang<sup>†</sup>

(Received July 10, 2025 ; Revised July 15, 2025 ; Accepted July 23, 2025)

**Key Words :** NDIF Method(무차원동영향함수법), Concave Membrane(오목 멤브레인), Eigenvalue(고유치), Low-frequency Divergence(저주파수 발산), Three-domain Decomposition Approach(3영역 분할법)

### ABSTRACT

This paper is a continuation of Part 1, in which the Non-dimensional Dynamic Influence Function (NDIF) method based on a three-domain decomposition approach was theoretically formulated to enable accurate eigenvalue extraction over the entire frequency range, from lower-order to higher-order modes. This study (Part 2) applied the proposed method to concave membranes with complex geometries to verify its validity and accuracy. Two representative models were considered: an L-shaped concave membrane and a crown-shaped membrane with two concave regions. Using the method developed in Part 1, eigenvalues over the entire frequency range were successfully extracted for both models and verified through comparison with the results obtained using the finite element method (FEM). It was confirmed that the proposed NDIF method can accurately extract eigenvalues over the entire frequency range regardless of the number of boundary nodes, and achieve the same high level of accuracy as FEM, which requires significantly more nodes.

### 1. 서 론

복잡한 형상의 오목 멤브레인에 대한 고정밀도 고유치 해석은 구조역학 및 음향공학 분야에서 높은 정확도와 수치적 안정성이 요구되는 핵심 연구 주제이다. 경계가 비정형이고 다중 오목 영역을 포함하는 오목 멤브레인의 고유치 정밀도를 올리기 위한 해석

적 방법인 무차원동영향함수법(NDIF법)은 저자에 의해 꾸준히 연구되어 왔다. 현재 기존 무차원동영향함수법은 고정밀도 고유치를 제공하지만, 저차 고유치에서의 수렴 불안정성과 고차 고유치에서의 정확도 저하 문제를 동시에 갖는다<sup>(1,2)</sup>.

이에 대한 해결 방안으로 이 논문의 1부에서는 ‘3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법’을 새롭게 정립하였다. 해당 방법은 저주파수 영역의 발산 문제와

<sup>†</sup> Corresponding Author ; Member, Hansung University, Professor  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Chan Jung Kim  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

경계 절점 수 증가에 따른 저차 고유치 미추출 문제를 근본적으로 해결하고, 저차부터 고차까지 전 주파수 대역에 걸친 고유치 추출이 가능함을 이론적으로 입증하였다.

이 논문(제2부)에서는 제1부에서 정립한 이론의 유효성과 적용성을 복잡한 형상을 가지는 비정형 오목 멤브레인에 대해 수치적으로 검증한다. 해석 대상은 L자형 오목 멤브레인과 두 개의 오목한 부분을 갖는 왕관 형상 멤브레인으로 설정하였으며, 각각의 모델에 대해 전 주파수 대역에 걸친 고유치가 성공적으로 추출되었는지 확인하고, 그 결과를 유한요소법(FEM)과 비교하였다. 이를 통해 제안된 방법의 실질적 적용 가능성과 수치적 신뢰성을 종합적으로 평가하였다.

### 2. 시스템 행렬의 판별식 계산 방법

처음 제안된 분할 영역법 기반 NDIF법에서는 축약 시스템 행렬  $\mathbf{SM}_r$ 의 판별식을 구하기 위해 식 (1)을 이용한다<sup>(1)</sup>.

$$\det(\mathbf{SM}_r) = \prod_{k=1}^S \Omega_k(\lambda) \tag{1}$$

여기서  $S$ 는 정사각 축약 시스템 행렬의 크기이다. 이 식에 대한 상세한 설명은 이전 논문을 참고하면 된다<sup>(2)</sup>. 식 (1)을 사용한 경우에, 절점 수가 증가하면 저주파수에서 시스템 행렬의 발산하여 저차 고유치들이 구해지지 않는 문제점이 존재하기에 이를 극복하기 위해 식 (2)가 제안되어졌다<sup>(2)</sup>.

$$\det(\mathbf{SM}_r) = \prod_{k=1}^{R(\lambda)} \Omega_k(\lambda) \tag{2}$$

여기서  $R(\lambda)$ 은 시스템 행렬의 랭크이다. 식 (2)는 로컬 시스템 행렬의 역행렬을 이용하여 축약 시스템 행렬을 생성하기 때문에 시스템 행렬의 저주파수 발산 문제를 해결할 수 없음이 최근 연구에서 밝혀졌다<sup>(3,4)</sup>. 그래서 이 논문의 1부에서는 식 (3)이 제안되었다.

$$\det(\mathbf{TM}) = \prod_{k=1}^{R(\lambda)} \Omega_k(\lambda) \tag{3}$$

여기서  $\mathbf{TM}$ 은 이 연구에서 새로이 추출한 비축약 시스템 행렬을 의미한다. 이 논문에서는 식 (3)을 예제 연구를 통해 검증하는 과정이 수행된다.

### 3. 예제 연구

#### 3.1 L자 형상 오목 멤브레인

이 절에서는 이 논문의 1부에서 제안된 3영역 분할법 기반 NDIF법에 대한 판별식 식 (3)의 타당성과 정확성을 검증하기 위해 Fig. 1과 같은 밀변과 높이가 각각 2m인 L자 형상 오목 멤브레인을 먼저 고려하였다. 멤브레인의 영역을 3개 영역으로 분할한 후에, 분할 영역들의 외부와 접촉 경계를 총 38개와 58개의 절점으로 Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)와 같이 각각 이산화하였다.

기존 NDIF법에서 사용된 판별식 식 (1)을 사용하여 Fig. 1의 두 멤브레인에 대한 판별식 곡선을 그리면 Fig. 2와 같다<sup>(1)</sup>. Fig. 2를 살펴보면, 38 절점에서 58 절점으로 절점 수가 증가하면, 저주파수 영역에서 시스템 행렬이 발산하는 것을 확인할 수 있다. 38 절

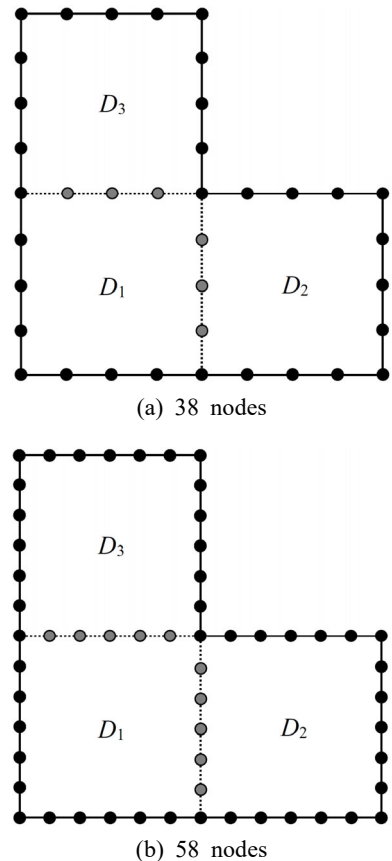


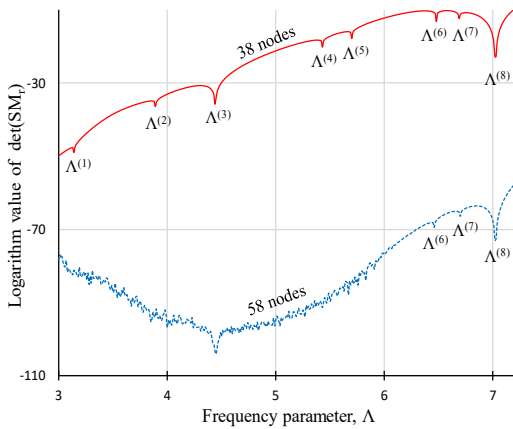
Fig. 1 L-shaped membranes divided into 3 domains and discretized with 38 and 58 nodes, respectively

점의 경우 1차~8차 모든 고유치가 추출되었으나, 58 절점의 경우 단지 6차~8차 고유치만 추출된 것이 확인된다. 이들 고유치들은 Table 1에 요약되었으며, 1281 개 절점을 사용한 유한요소 해석 결과와 잘 일치하는 것으로 보아, 적은 수의 절점을 사용함에도 NDIF법은 정밀도 면에서 우수한 성능을 보인다고 말할 수 있다.

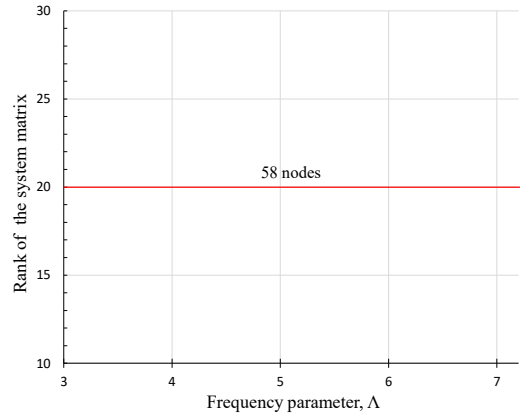
Fig. 1(b)의 58 절점의 경우와 같이 절점 수가 증가하면 기존 NDIF법은 저차 고유치를 추출하지 못하는 문제점이 확인된다<sup>(1)</sup>. 이러한 문제점은 저주파수 구간에서 시스템 행렬의 랭크가 풀 랭크(full rank)가 아니기 때문에 발생하는 것으로 이전 논문에서 규명되었

다<sup>(3)</sup>. 그래서 이러한 문제점을 해결하기 위해 1차적으로 식 (2)가 제안되었다. 한편, 식 (2)의 유용성은 시스템 행렬의 랭크가 저주파수 구간에서 풀 랭크가 아니어야 보장된다. 그런데 Fig. 3과 같이 시스템 행렬의 랭크가 전체 주파수 구간에서 풀 랭크 20임이 확인된다. 여기서 풀 랭크 값인 20은 Fig. 1(b)에서의 접촉 경계 총 절점 수 10의 두배에 해당하는 값이다.

이제 식 (3)을 사용하여 고유치를 추출하는 시도를 하고자 한다. 식 (3)에 포함된 비축약 시스템 행렬(TM)의 랭크를 먼저 계산하였으며 그 결과는 Fig. 4와 같다. 랭크 값이 저주파수 구간에서는 풀 랭크가 아님



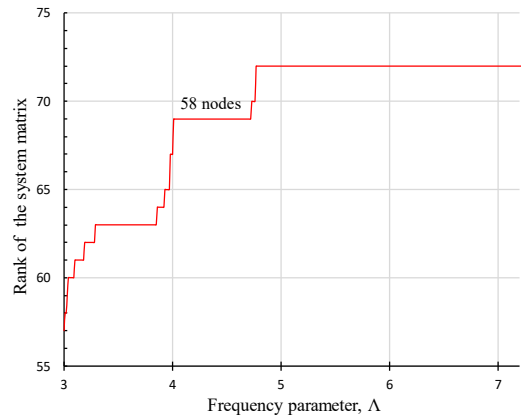
**Fig. 2** Determinant curves of the L-shaped membranes plotted by Eq. (1) developed in the original NDIF method



**Fig. 3** Rank of the reduced system matrix for the L-shaped membrane discretized with 58 nodes as shown in Fig. 1(b)

**Table 1** Eigenvalues of the L-shaped membranes obtained by NDIF method (Eq. (1)) and FEM (ANSYS)

	NDIF method (Eq. (1))		FEM (1281 nodes)
	38 nodes	58 nodes	
$\Lambda^{(1)}$	3.14	None	3.11
$\Lambda^{(2)}$	3.89	None	3.90
$\Lambda^{(3)}$	4.44	None	4.45
$\Lambda^{(4)}$	5.43	None	5.44
$\Lambda^{(5)}$	5.70	None	5.67
$\Lambda^{(6)}$	6.48	6.46	6.47
$\Lambda^{(7)}$	6.69	6.70	6.73
$\Lambda^{(8)}$	7.02	7.02	7.05



**Fig. 4** Rank of the non-reduced system matrix for the L-shaped membrane discretized with 58 nodes as shown in Fig. 1(b)

이 확인된다. 그래서 식 (3)의 유용성이 보장된다고 결론 지을 수 있다.

Fig. 5(a)는 식 (3)을 이용하여 그린 판별식 곡선을 보여 준다. 이 판별식 곡선을 살펴보면, 1차~8차까지 모든 고유치가 성공적으로 구해졌음을 확인할 수 있다. 그러나 저주파수 구간에서 판별식 곡선이 불연속적으로 변화하는 현상이 발생하여 저차 고유치들 ( $\Lambda_1, \Lambda_2$ )을 확인하기가 용이하지 않음을 보여준다. 그래서 판별식 곡선의 불연속성을 제거하기 위한 평탄화 과정이 수행되었으며 그 결과는 Fig. 5(b)와 같다<sup>(2)</sup>. Fig. 5(b)의 판별식 곡선에서 추출된 1차~8차 고유치들은 Table 2에 요약되었으며, 이들 고유치들을

FEM(ANSYS) 결과와 비교해보면 전 주파수 대역에서 모든 고유치들이 정확하게 구해졌음을 확인할 수 있다. 한편, 고유치 뿐만 아니라 오목 멤브레인의 모드 형상을 추출하는 방법에 대한 연구는 후속 논문에서 수행될 예정이다.

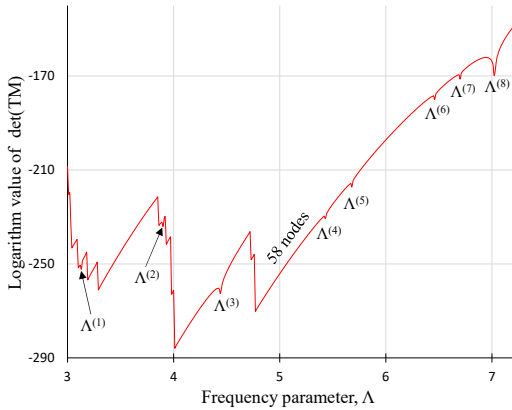
3.2 왕관 형상 오목 멤브레인

두 번째 예제로 Fig. 6과 같은 왕관 모양 멤브레인이 고려된다. 이 멤브레인의 형상을 살펴보면 두 군데의 오목한 부분을 가지고 있어서 반드시 3개 영역으로 분할되어야 함을 알 수 있다. 그래서 Fig. 6과 같이 3개의 블록 영역으로 분할한 후에 총 52개의 절점으로 경계를 이산화하였다. 이 52개의 절점 중에 10개는 접촉 경계 절점, 나머지 42개는 외부 경계 절점이다.

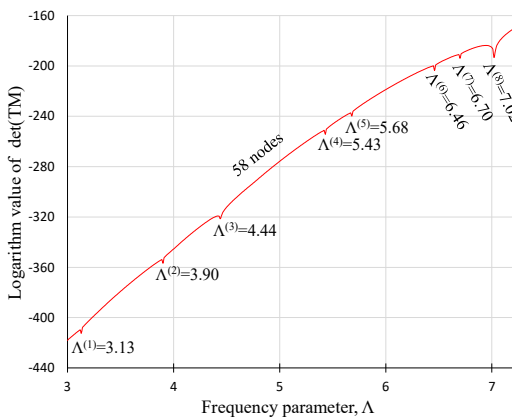
Fig. 6의 52개 절점으로 이산화된 멤브레인에 이전 연구에서 개발한 ‘3영역 분할법 기반 NDIF법’ 이론식 식 (1)을 적용하면 Fig. 7과 같은 판별식 곡선을 얻을 수 있다<sup>(1)</sup>. 앞에서 고려한 L자 형상 멤브레인과 마찬가지로 절점 수 과다로 인해 저주파수 영역에서 시

Table 2 Eigenvalues of the L-shaped membrane obtained by the proposed method (58 nodes) using Eq. (3) and FEM (1281 nodes)

	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$	$\Lambda_6$	$\Lambda_7$	$\Lambda_8$
Proposed method	3.13	3.90	4.44	5.43	5.68	6.46	6.70	7.02
FEM (ANSYS)	3.11	3.90	4.45	5.44	5.67	6.47	6.73	7.05



(a) Before removing the discontinuity



(b) After removing the discontinuity

Fig. 5 Determinant curves of the L-shaped membranes (58 nodes) plotted by Eq. (3) derived in the proposed method

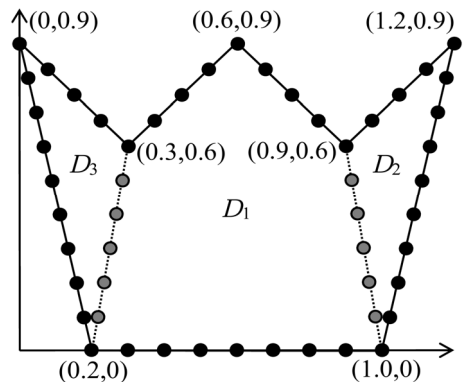


Fig. 6 Crown-shaped membrane divided into 3 domains and discretized with 52 nodes

시스템 행렬이 발산하는 현상을 확인할 수 있다. 이로 인해 저차 고유치들은 추출되지 않았으며 고차 고유치들만 추출 가능함을 확인할 수 있다.

Fig. 7의 판별식 곡선에서 점선 동그라미로 표시된 부분은 두 개의 극소값이 존재하는 부분으로, 확대 그림에서와 같이 그 두 극소값을  $S^{(4)}$ 와  $S^{(5)}$ 로 표시하였다. 그래서 전체 판별식 곡선에서 극소값은 총 다

섯 군데로,  $\Lambda^{(5)}$ ,  $\Lambda^{(6)}$ ,  $S^{(4)}$ ,  $S^{(5)}$ ,  $\Lambda^{(7)}$ 로 표시하였다. 이들 극소값에 해당되는 주파수 파라미터 값들이 고유치에 해당될 수 있으므로, 이들 주파수 파라미터 값들을 Table 3의 두 번째 열에 요약한 후 세 번째 열에 요약된 FEM(ANSYS)으로 계산한 고유치와 비교하였다.

Table 3의 두번째 열 고유치들을 살펴보면,  $\Lambda^{(5)}$ ,  $\Lambda^{(6)}$ ,  $\Lambda^{(7)}$ 만이 FEM으로 구한 5차~7차 고유치들과 일치함

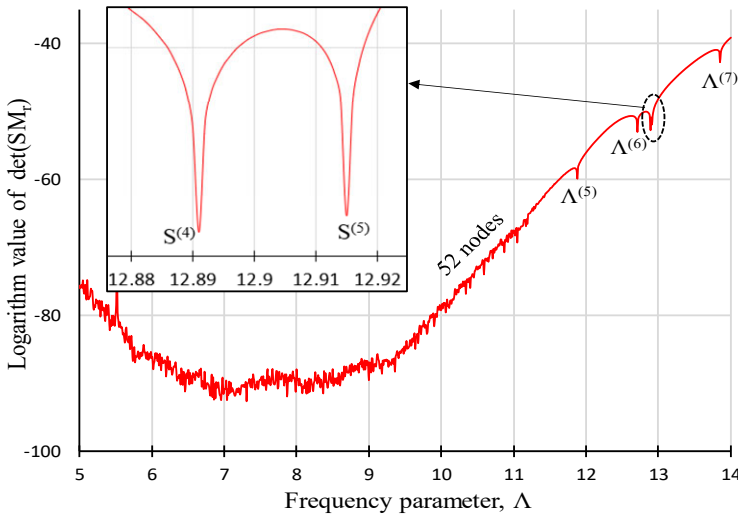
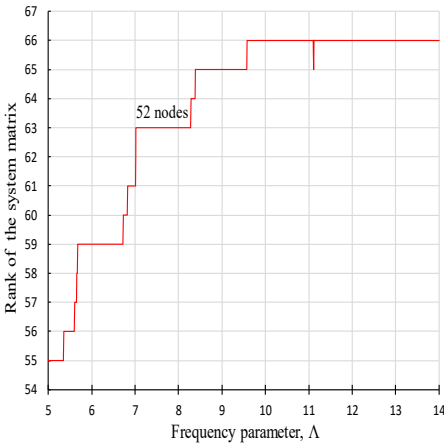


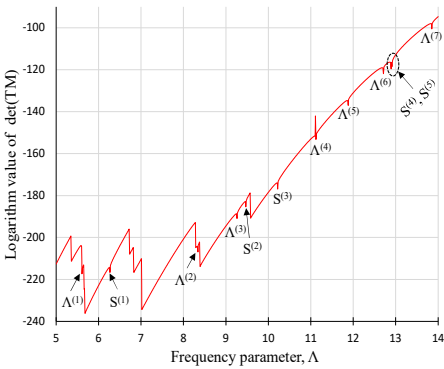
Fig. 7 Determinant curves of the crown-shaped membrane plotted by Eq. (1) developed in the original NDIF method

Table 3 Eigenvalues of the crown-shaped membrane obtained by NDIF method (Eq. (1)), FEM (ANSYS), and the proposed method (Eq. (3))

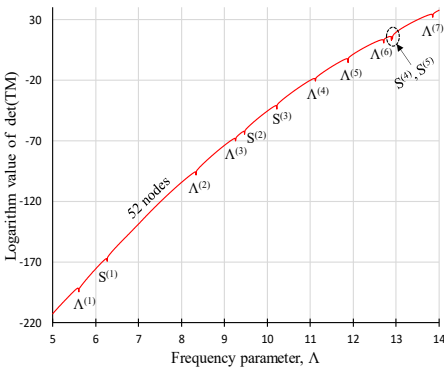
	NDIF method (Eq. (1)), 52 nodes	FEM (1198 nodes)	Proposed method (Eq. (3)), 52 nodes
$\Lambda^{(1)}$	None	5.58	5.61
$S^{(1)}$	None	-	6.27
$\Lambda^{(2)}$	None	8.29	8.34
$\Lambda^{(3)}$	None	9.25	9.26
$S^{(2)}$	None	-	9.47
$S^{(3)}$	None	-	10.22
$\Lambda^{(4)}$	None	11.04	11.12
$\Lambda^{(5)}$	11.88	11.77	11.88
$\Lambda^{(6)}$	12.71	12.71	12.71
$S^{(4)}$	12.89	-	12.89
$S^{(5)}$	12.91	-	12.91
$\Lambda^{(7)}$	13.85	13.86	13.85



**Fig. 8** Rank of the non-reduced system matrix for the crown-shaped membrane discretized with 52 nodes as shown in Fig. 6



(a) Before removing the discontinuity



(b) After removing the discontinuity

**Fig. 9** Determinant curves of the crown-shaped membrane (52 nodes) plotted by Eq. (3) derived in the proposed method

을 알 수 있다. 결과적으로  $S^{(4)}$ 와  $S^{(5)}$ 는 허위 고유치 (spurious eigenvalue)이라고 말할 수 있다. 이들 허위 고유치들은 분할된 영역  $D_1$ 에 해당되는 멤브레인의 고유치에 해당되는 것으로 판명되었으며, 이들 허위 고유치의 발생 원인 분석과 제거 방안에 대한 연구는 후속 논문에서 이어질 예정이다.

Fig. 7의 판별식 곡선에서 나타나 저주파수 영역 발산 현상을 제거하기 위해, 이 논문에서 제안된 식 (3)을 이용하고자 한다. 이를 위해서 먼저 시스템 행렬의 랭크 값을 먼저 구했으며 그 결과는 Fig. 8과 같다. 이 랭크 곡선에서 확인할 수 있듯이 주파수 파라미터 값이 증가함에 따라 랭크 값도 같이 변화하므로, 식 (3)의 유용성이 보장된다고 말할 수 있다.

이제 식 (3)을 이용하여 판별식 곡선을 그려보면 Fig. 9 (a)와 같다. 이 판별식 곡선의 저주파수 구간에서 곡선이 연속적으로 변하는 지점이 반복적으로 나타나는 것을 확인할 수 있으며, 이로 인해 저차 고유치 추출에 어려움이 있음이 보인다. 그래서 과거 연구에서 개발한 평탄화 과정을 수행하였으며<sup>(2)</sup>, 그 결과는 Fig. 9(b)와 같다. Fig. 9(b)의 판별식 곡선을 살펴보면, 저주파수 구간에서 불연속성이 제거되어졌음을 확인할 수 있으며, 이 곡선의 극소값으로부터 총 7개의 고유치  $\Lambda^{(1)} \sim \Lambda^{(7)}$ 와 총 5개의 허위 고유치  $S^{(1)} \sim S^{(5)}$ 가 추출되어졌으며, 이들은 Table 3의 마지막 열에 요약되었다.

Table 3의 마지막 열에 요약된 제안된 방법에 의해 구해진 고유치들은 적은 절점을 사용함에도 불구하고 1198개의 많은 절점을 사용한 FEM 고유치들과 거의 일치함을 확인할 수 있다. 그리고 전술한 바와 같이 허위 고유치( $S^{(1)} \sim S^{(5)}$ ) 제거 방안에 대한 연구는 후속 논문에서 수행될 예정이다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 제1부에서 정립한 3영역 분할법 기반 무차원동영향함수법의 실효성과 적용 가능성을 복잡한 형상을 가지는 오목 멤브레인에 적용하여 수치적으로 검증하였다. 분석 대상은 비정형 L자 형상 멤브레인과 다중 오목부를 가진 왕관 형상 멤브레인이며, 두 모델 모두에 대해 전 주파수 대역에 걸친 고유치가 성공적으로 추출되었다.

기존 NDIF 이론식은 절점 수가 증가할 경우 저주파

수 영역에서 시스템 행렬의 수치적 발산 현상이 발생하여 저차 고유치의 미추출 문제가 발생하였으나, 이 연구에서는 제1부에서 제안된 새로운 비축약 시스템 행렬 기반 관별식 계산법을 적용함으로써 이 문제를 효과적으로 해결하였다. 특히, 평탄화 과정을 통해 불연속적인 관별식 곡선을 연속적으로 변환함으로써 저차 고유치의 정확한 추출이 가능해졌으며, 추출된 고유치들은 FEM 결과와의 비교를 통해 그 정확성이 입증되었다.

결과적으로, 이 연구를 통해 제안된 방법은 복잡한 형상의 오목 멤브레인에 대해서도 적은 수의 절점으로 FEM 수준의 높은 정밀도로 전 주파수 대역 고유치를 추출할 수 있음을 확인하였다. 또한, 허위 고유치의 발생 메커니즘에 대한 관찰도 이루어졌으며, 이에 대한 분석과 제거 방안은 향후 연구를 통해 보다 심층적으로 다룰 예정이다.

## 후 기

이 연구는 한성대학교 교내학술연구비 지원 과제임.

## References

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the

Non-dimensional Dynamics Influence Function, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(2) Kang, S.-W., 2020, Lower-order and Higher-order Eigenmode Analyses of Arbitrarily Shaped Membranes Using Non-dimensional Dynamic Influence Function Method, *Transactions of the Korea Society of Mechanical Engineers*, Vol. 44, No. 12, pp. 971~977.

(3) Kang, S.-W., 2024, Development of the NDIF Method Based on the Sub-domain Method Overcoming the Non-extraction Problem of Low-order Eigenvalues for Concave Membranes: Part 1(theoretical formulation and verification), *Transactions of the Korea Society of Mechanical Engineers*, Vol. 34, No. 6, pp. 709~716.

(4) Kang, S.-W., 2024, Development of the NDIF Method Based on the Sub-domain Method Overcoming the Non-extraction Problem of Low-order Eigenvalues for Concave Membranes: Part 2(example studies and considerations), *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 34, No. 6, pp. 728~734.