

# 하중-의존 치 변형을 반영한 잠재 에너지법 기반 기어 물림 강성 추정 기법

## Estimating Gear Mesh Stiffness Based on the Potential Energy Method Considering Load-dependent Tooth Deformation

안 홍 철\* · 강 연 준†

Hong Cheol Ahn\* and Yeon June Kang†

(Received November 25, 2025 ; Revised January 16, 2026 ; Accepted February 2, 2026)

**Key Words :** Gear Mesh Stiffness(기어 물림 강성), Potential Energy Method(잠재 에너지법), Plastic Gears(플라스틱 기어), Dynamic Model(동적 모델)

### ABSTRACT

Although gear mesh stiffness plays a critical role in predicting the dynamic behavior of gear systems, conventional analytical methods do not adequately reflect the load-dependent physical deformation of the teeth, which tends to appear more prominently in plastic gears. In this study, an improved approach based on potential energy is proposed, which incorporates elastic tooth deformation and nonlinear contact behavior to compute realistic, load-sensitive meshing stiffness. The magnitude of the contact stiffness is updated iteratively based on the applied load while maintaining the computational efficiency of the original potential energy method. Values for meshing stiffness obtained using the proposed approach closely matched the results of a finite element analysis, whereas conventional methods failed to reproduce the nonlinear variation under increasing load. The proposed stiffness function was implemented in a time-domain dynamic model of a gear system to evaluate its performance, and the results show that it was able to predict the dynamic transmission error and meshing force accurately. The predictions also agreed closely with values obtained using the finite element method. These findings demonstrate that the proposed method effectively captured the load-dependent behavior of gear mesh stiffness and can thus be applied as a reliable tool in the dynamic analysis and design of plastic gear systems.

### 1. 서 론

최근 산업 전반에서 기계 시스템의 경량화와 저소

음화 요구가 증가함에 따라, 기어 시스템의 진동 및 동적 거동을 정확하게 예측하는 것의 중요성이 더욱 커지고 있다. 기어가 맞물릴 때 치면 변형과 접촉 거동에 따라 기어의 물림 강성(mesh stiffness)이 시시

† Corresponding Author ; Member, School of Mechanical Engineering/ Institute of Advanced Machines and Design, Seoul National University, Professor  
E-mail : yeonjune@snu.ac.kr

\* Member, School of Mechanical Engineering/Institute of Advanced Machines and Design, Seoul National University, Student

# A part of this paper was presented at the KSNVE 2024 Annual Autumn Conference

‡ Recommended by Editor Jong-Seok Oh

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

각각 변화하는데, 이로 인해 기어의 이론적 회전과의 차이인 전달 오차(transmission error)가 발생한다. 이러한 전달 오차는 기어 진동을 야기하기 때문에, 기어의 동적 거동을 해석하기 위해 물림 강성을 추정하는 다양한 해석적·실험적 기법이 연구되어 왔다<sup>(1)</sup>.

대표적인 해석적 기법인 잠재 에너지법(potential energy method, PEM)은 스퍼 기어 치를 보 요소로 모델링하고 물림각에 따른 치의 변형 에너지(strain energy) 합으로부터 등가 물림 강성을 산출하는 방법으로, Yang et al.이 기어 치를 캔틸레버 보로 이상화한 초기 모델을 제안하였다<sup>(2)</sup>. Tian et al.은 치의 전단 변형을 고려하여 기존 모델을 개선하였고<sup>(3)</sup>, Sainsot et al.은 기어 림의 유연성으로 인한 필렛 기초 강성(fillet-foundation stiffness)을 도입하여 잠재 에너지법을 확장하였다<sup>(4)</sup>. 또한 Zhiguo et al.은 기어 치의 개수에 따라 달라지는 기하학적 특성을 잠재 에너지법에 반영하고 유한요소 해석(finite element method, FEM)을 통해 이를 검증하였다<sup>(5)</sup>. 이후 잠재 에너지법 기반 물림 강성은 다양한 기어 동특성 해석 연구에서 널리 활용되어 왔다<sup>(6)</sup>.

한편, 실험적 방법을 통해 물림 강성을 산출하는 연구도 꾸준히 이루어졌다. Umezawa et al.은 스트레인 게이지를 이용해 치의 변형을 측정하고<sup>(7)</sup>, 이로부터 물림 강성을 산출하는 실험 기법의 기초를 마련하였다. Kai et al.은 실험을 통해 여러 종류의 스퍼 기어를 대상으로 물림 강성을 측정하고, 기어 파라미터와 물림 강성 간의 경험적 관계식을 도출하였다<sup>(8)</sup>. 마찬가지로 실험 결과로부터 도출된 ISO 6336 표준은 쉽고 빠르게 물림 구간에 따른 평균적인 강성값을 추정하는 방법으로 활용된다<sup>(9)</sup>.

그러나 이러한 기존 기법들은 일반적으로 많이 쓰이는 금속 재질의 기어를 대상으로 개발되었으며, 대부분 높은 강성과 비교적 작은 변형을 전제로 한다는 한계가 있다. 특히 잠재 에너지법은 치의 동적 하중과 국부적인 변형은 고려하지 않아, 유연성이 큰 재질에 적용할 경우 정확도가 저하될 수 있다. 최근 자동차, 가전, 소형 액추에이터 등 다양한 분야에서 활용이 증가하고 있는 플라스틱 기어는 낮은 탄성계수로 인해 하중 변화에 따른 치 변형과 물림각의 변화가 상대적으로 크게 나타나므로, 기존 물림 강성 모델을 그대로 적용하는 것은 적절하지 않다.

이러한 한계를 극복하기 위해 플라스틱 기어를 대

상으로 한 물림 강성 연구도 일부 수행되어 왔다. Meuleman et al.은 유한요소 해석을 통해 플라스틱 기어의 물림 강성을 산출하였고<sup>(10)</sup>, Liu et al.은 해석적 모델과 유한요소법을 결합해 기어의 변형을 반영한 기법을 제안하였다<sup>(11)</sup>. 유한요소법은 높은 정확도로 물림 강성을 추정할 수 있으나, 전처리 및 계산에 필요한 시간과 비용 면에서 비효율적이다.

이에 따라 기존 잠재 에너지법을 개선하는 연구도 이루어졌다. Cao et al.은 하중에 따른 국부 접촉 강성을 도입한 모델을 제시하였고<sup>(12)</sup>, Xu et al.은 치 변형으로 인한 물림각 변화를 반영한 모델을 개발하였다<sup>(13)</sup>. 그럼에도 불구하고 플라스틱 기어의 물림 강성에 대한 연구는 여전히 부족한 실정이며, 하중에 따른 치면 침투 변형과 국부 접촉 강성 변화의 상호작용을 복합적으로 고려한 모델이 요구된다.

이에 이 연구에서는 플라스틱 기어의 변형 및 접촉 거동을 효율적으로 반영할 수 있는 하중-의존 치 변형을 반영한 잠재 에너지법 기반 물림 강성 추정 기법을 제안한다. 제안하는 기법은 기존 잠재 에너지법의 계산 효율성을 유지하면서, 플라스틱 기어의 하중에 따른 비선형 변형, 침투 및 국부 접촉 강성을 반복적으로 계산하여 수렴하는 물림 강성을 도출한다. 기존 기법들과의 차이점은 Table 1에 정리하였다.

특히 제안 기법은 FEM과 유사한 수준의 예측 정확도를 확보하면서도, 해석식 기반 구조를 통해 기어 설계 변수 변화에 대한 파라미터 스터디와 시간영역 동적 모델과의 연계가 용이하다는 장점을 가진다. 먼저 이 기법의 기반이 되는 잠재 에너지법의 이론적 배경을 정리하고, 제안된 개선 모델의 특징과 계산 절차를 상세히 설명한다. 그리고 이를 기존 강성 추정 기법들과 비교하고 기어 동적 모델에 적용했을 때

**Table 1** Comparison with other methods

	PEM	ISO 6336	FEM	Proposed
Computation cost	Low	Low	High	Low
Assumed state	Static	Static	Static	Quasi-static
Deformation	X	X	O	O
Force dependence	X	X	O	O
Accuracy	Middle	Low	High	High

의 결과를 분석하면서, 플라스틱 기어의 동특성 해석에서 제안 기법의 필요성과 유효성을 확인한다.

## 2. 잠재 에너지법

잠재 에너지법은 스퍼기어 치를 Fig. 1과 같이 변형 가능한 보 요소로 이상화한 후 물림각에 따른 치의 변형 에너지로부터 등가 물림강성을 산출하는 대표적인 해석적 기법이다. 기어가 맞물리면서 발생하는 힘에 의해 기어 치는 굽힘 변형 에너지  $U_b$ , 전단 변형 에너지  $U_s$ , 축 변형 에너지  $U_a$ , 그리고 맞물림 접촉에 의한 헤르츠 접촉(hertzian contact) 에너지  $U_h$ 를 갖는다. 접촉 에너지는 기어 치 쌍의 접촉에 의해 발생하므로, 기어 치 한 쌍의 전체 변형에너지  $U$ 는 식 (1)과 같다.

$$U = U_{bp} + U_{sp} + U_{ap} + U_{bg} + U_{sg} + U_{ag} + U_h \quad (1)$$

$U_{bp}$ ,  $U_{sp}$ ,  $U_{ap}$ 는 각각 피니언 축에 해당하는 굽힘 변형 에너지, 전단 변형 에너지, 축 변형 에너지이며,  $U_{bg}$ ,  $U_{sg}$ ,  $U_{ag}$ 는 기어 축에 해당한다.

### 2.1 굽힘, 전단, 축 변형 강성

Fig. 1과 같이 기어 치에서 접촉력은 작용선(line of action, LOA)을 따라 발생하며, 기어 치의 굽힘 변형, 전단 변형 및 축 변형을 유발한다. 작용선과 y축이 이루는 각도를 물림각  $\theta_m$ 라고 했을 때, 각 변형 에너지는 각 식 (2)~식 (4)와 같은 적분을 통해 얻을 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$U_b = \int \frac{M_x^2}{2EI_x} dx = \int_0^d \frac{[F_b(d-x) - F_a h]^2}{2EI_x} dx \quad (2)$$

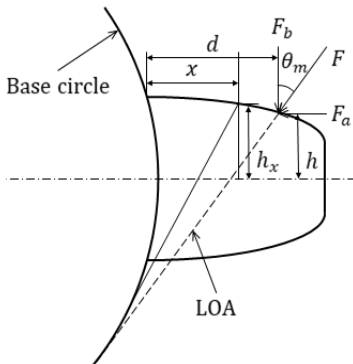


Fig. 1 Gear tooth assumed as a cantilever beam

$$U_s = \int \frac{C_f V_x^2}{2GA_x} dx = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx \quad (3)$$

$$U_a = \int \frac{F_a^2}{2EA_x} dx = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \quad (4)$$

이때  $E$ ,  $G$ ,  $W$ ,  $I_x$ ,  $A_x$ 는 각각 탄성 계수, 전단 탄성 계수, 치의 두께,  $x$ 에서의 단면 2차 모멘트와 단면적이다. 따라서 굽힘 강성  $k_b$ , 전단 강성  $k_s$ , 축 방향 강성  $k_a$ 는 식 (5)와 같다.

$$k_b = F^2/2U_b, k_s = F^2/2U_s, k_a = F^2/2U_a \quad (5)$$

### 2.2 헤르츠 접촉 강성

기어 치 간의 접촉은 두 탄성체가 곡률을 가진 상태로 압축되는 문제로 볼 수 있으며, 이때 접촉점 부근에서는 국부적인 변형이 발생한다. 헤르츠 접촉 강성은 이러한 국부 변형을 탄성 접촉 이론에 기반하여 등가 강성으로 나타낸 것으로, 기어의 전체 물림 강성을 구성하는 주요 요소 중 하나이다. 기어 물림 강성에 대한 많은 연구들은 접촉력에 따른 비선형성을 배제하기 위해 식 (6)과 같은 헤르츠 접촉 강성을 사용한다( $v$ 는 기어 재질의 푸아송 비이다)<sup>(5)</sup>.

$$k_h = \frac{\pi WE}{4(1-\nu^2)} \quad (6)$$

### 2.3 필렛 기초 강성

기어 치근부는 단순히 치가 고정되는 지점이 아니라, 림과 허브의 변형에 의해 유연하게 움직일 수 있다. 필렛 기초 강성은 이러한 치근부의 응력과 림 변형의 결합 효과를 등가 강성으로 환산한 것으로, 치의 변형만을 고려하는 모델에서 발생하는 강성 과대평가를 보정하는 역할을 한다. Muskhelishvili이 계산한 원형 링의 변형식으로부터<sup>(14)</sup>, Sainsot이 식 (7)과 같은 다항식 표현을 유도하였다<sup>(4)</sup>.

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2 \theta_m}{EW} \left\{ L^* \left( \frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_f}{S_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \theta_m) \right\} \quad (7)$$

다항식 계수  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $P^*$ ,  $Q^*$ 는 식 (8)과 같이 구할 수 있고,  $u_f$ ,  $s_f$ ,  $\theta_f$ ,  $h_{fi} = r_f/r_{int}$ 는 Fig. 2에서 나타내는 수치들이다.  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $F_i$ 는 Table 2에서 확인할 수 있다.

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = \frac{A_i}{\theta_f^2} + B_i h_{fi}^2 + \frac{C_i h_{fi}}{\theta_f} + \frac{D_i}{\theta_f} + E_i h_{fi} + F_i \tag{8}$$

전체 물림 강성은 치의 변형 강성, 헤르츠 접촉 강성, 필렛 기초 강성의 직렬 합으로 나타낼 수 있으며, 이를 통해 물림각에 따른 등가 강성을 산출할 수 있다. 그러나 식 (5)~식 (7)에서 알 수 있듯이, 각각의 강성은 기어 치 하중에 무관하기 때문에 치면 압입 변형, 접촉점 이동, 접촉 쌍 간의 하중 재분배와 같은 비선형 거동을 반영하지 못한다는 한계가 있다. 특히 변형에 취약한 플라스틱 기어에서는 이러한 한계가 두드러져 기존 잠재 에너지법의 예측 정확도가 크게 저하된다. 따라서 하중 변화에 따른 치 변형과 접촉 강성 변화를 반영할 수 있는 물림 강성 모델이 요구되며, 이러한 필요성을 바탕으로 3장에서 개선된 잠재 에너지법 (improved potential energy method, IPEM)을 제안한다.

### 3. 개선된 잠재 에너지법

개선된 잠재에너지법은 기어 치가 맞물릴 때 발생

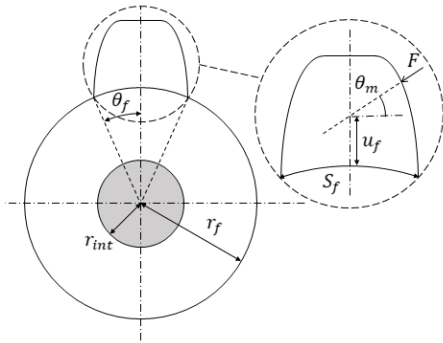


Fig. 2 Geometrical parameters for tooth fillet

Table 2 Values of the coefficients of Eq. (8)

	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$	$E_i$	$F_i$
$L^*$	$-5.6 \times 10^{-5}$	-0.002	$-2.3 \times 10^{-4}$	0.005	0.027	6.805
$M^*$	$6.0 \times 10^{-4}$	0.028	$-8.3 \times 10^{-3}$	-0.010	0.162	0.909
$P^*$	$-5.1 \times 10^{-4}$	0.185	$5.4 \times 10^{-6}$	0.053	0.289	0.924
$Q^*$	$-6.2 \times 10^{-5}$	0.009	$-4.1 \times 10^{-4}$	0.008	-0.147	0.690

하는 하중 의존적 변형과 그로 인한 접촉점의 이동을 반영한다. 하중이 작용하면 각 기어 치의 강성에 따라 변형량이 결정되고, 이에 따라 접촉 위치가 이동한다. 이를 반영해 맞물림 각도를 보정하고 보정된 상태에서의 치 강성을 다시 계산한다. 계산 과정은 2장의 잠재 에너지법을 기반으로 하되, 접촉 강성은 하중 비선형성을 고려할 수 있도록 Weber의 헤르츠 접촉 모델을 적용한다. 등가 물림 강성은 변형-접촉 위치 관계를 반복적으로 갱신하면서 수렴할 때까지 계산된다. 또한 두 쌍의 치가 동시에 맞물리는 구간에서는 각 치 쌍의 강성 비에 따라 하중 분배비를 산정하고, 분배된 하중으로부터 다시 변형량과 접촉 위치가 보정된다. 이와 같은 과정을 통해 단일 및 이중 치 물림 구간에서 발생하는 하중-변형-접촉 기하의 상호작용을 통합적으로 고려한 물림 강성을 보다 정밀하게 예측할 수 있으며, 전체 계산 절차는 Fig. 3에 요약되어 있다.

### 3.1 기어 맞물림 각도 보정

기어 치가 맞물리면서 하중을 받을 경우, Fig. 4와 같이 두 접촉면은 탄성 변형을 일으키며 서로 미소하게 접근하게 된다. 이때 접촉면의 국부적인 침투는 헤르츠 접촉 이론으로 설명할 수 있으며, 이러한 국부 변형은 각 기어가 회전하는 구조적 거동과는 독립

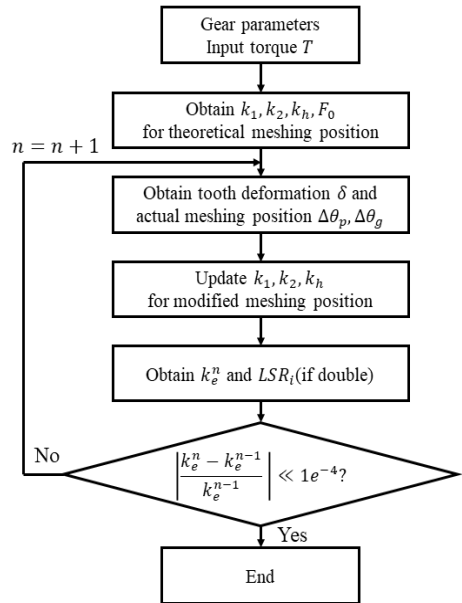


Fig. 3 Calculation flowchart

적으로 생각한다. 하중이 작용하면 접촉점은 초기의 접촉 위치로부터 미소한 거리만큼 이동하며, 이 변형을 보상하기 위해 각 기어 치에는 소량의 회전 변위가 발생한다. 회전 변위( $\Delta\theta_p$ ,  $\Delta\theta_g$ )는 접촉점의 변위, 즉 식 (9)의 탄성 접근 길이( $\delta_p$ ,  $\delta_g$ )를 식 (10)과 같이 각 기어의 기초원 반경( $r_{bp}$ ,  $r_{bg}$ )으로 나누어 구할 수 있다.

$$\delta_p = F/k_p, \delta_g = F/k_g \tag{9}$$

$$\Delta\theta_p = \frac{\delta_p}{r_{bp}}, \Delta\theta_g = \frac{\delta_g}{r_{bg}} \tag{10}$$

각 기어의 변형 강성  $k_p$ ,  $k_g$ 는 물림각  $\theta_m$ 에서의 굽힘 변형 강성, 전단 변형 강성, 축 변형 강성, 필렛 기조 강성의 직렬 합이다.

$$\frac{1}{k_p} = \frac{1}{k_{bp}} + \frac{1}{k_{sp}} + \frac{1}{k_{ap}} + \frac{1}{k_{fp}} \tag{11}$$

$$\frac{1}{k_g} = \frac{1}{k_{bg}} + \frac{1}{k_{sg}} + \frac{1}{k_{ag}} + \frac{1}{k_{fg}}$$

이때 식 (10)을 통해서 계산한 회전 변위는 실제 기어의 회전 각도가 아닌 기어 치가 서로 침투하면서 발생하는 탄성 변형에 의한 국부적인 접근 각도를 의미한다. 이는 곧 기어 치에서 바라보면 물림각( $\theta_m$ )의 변위와 같다. 따라서 이 방법에서 각 기어의 등가 물림 강성을 산출할 때  $\theta_m + \Delta\theta_p$ ,  $\theta_m + \Delta\theta_g$ 에서 재계산한 값을 반복적으로 사용한다.

### 3.2 비선형 헤르츠 접촉 강성

Weber은 헤르츠 접촉 이론으로부터 하중에 의해 발생하는 치의 접촉면에서의 변형량을 식 (12)와 같은 식으로 표현한다<sup>(15)</sup>.

$$\delta_h = \frac{2F}{\pi W} \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{2h_1}{b} - \frac{\nu_1}{2(1-\nu_1)} \right) + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{2h_2}{b} - \frac{\nu_2}{2(1-\nu_2)} \right) \right], \tag{12}$$

$$b = \sqrt{\frac{4F}{\pi W} \left( \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

여기서,  $h_1$ 과  $h_2$ 는 접촉선 상에서 각 치의 중심과 접촉점 사이의 거리이며,  $r_1$ 과  $r_2$ 는 접촉점에서의 곡률 반경을 나타낸다. 이에 대응하는 헤르츠 접촉 강성은 식 (13)과 같이 정의된다.

$$k_h[F] = \frac{F}{\delta_h} \tag{13}$$

이때  $k_h[F]$ 는 접촉력의 크기에 따라 달라지는 비선형 접촉 강성으로, 식 (6)의 표현과 달리 하중의 영향을 직접 반영한다. 또한, 기어의 물림 각도에 따라  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ 가 변화하므로 맞물림 각도의 보정 효과 역시 반영할 수 있다.

### 3.3 하중 분배비

기어가 회전하면서 두 쌍의 치가 동시에 맞물리는 구간에서는 각 치쌍의 강성 차이에 따라 접촉력이 다르게 분배된다. 그러나 두 쌍의 치는 동일한 기어 축 회전에 의해 동시에 변형되므로, 각 치쌍에서 발생하는 변형량은 전체 회전변위 조건을 만족해야 한다. 이러한 기하학적 제약으로부터 각 치쌍의 하중 분배비(load sharing ratio, LSR)를 유도할 수 있다. 두 쌍의 치에서 발생하는 변형량을 각각  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  대응하는 등가 강성을  $k_{eq1}$ ,  $k_{eq2}$ 라 하면, 식 (14)와 같은 관계가 성립한다.

$$F_1 = \delta_1 k_{eq1} = \frac{\delta_1}{\left( \frac{1}{k_{p1}} + \frac{1}{k_{g1}} + \frac{1}{k_{h1}[F_1]} \right)} \tag{14}$$

$$F_2 = \delta_2 k_{eq2} = \frac{\delta_2}{\left( \frac{1}{k_{p2}} + \frac{1}{k_{g2}} + \frac{1}{k_{h2}[F_2]} \right)}$$

여기서,  $F_1$ ,  $F_2$ 는 각 치쌍에 작용하는 접촉력이며,  $k_{p1}$ ,  $k_{g1}$ ,  $k_{h1}$ ,  $k_{p2}$ ,  $k_{g2}$ ,  $k_{h2}$ 는 각 치쌍에 해당하는 피니언측 변형 강성, 기어측 변형 강성, 비선형 헤르츠

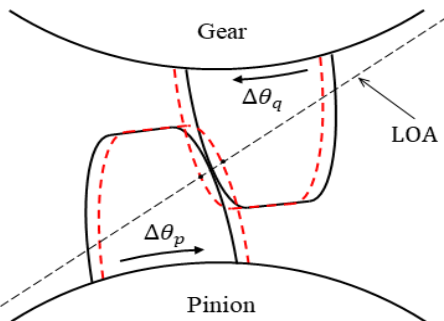


Fig. 4 Elastic approach of two gear teeth

접촉 강성이다.

전체 하중  $F = F_1 + F_2$ 이고 기하학적 제약에 의해 두 쌍의 변형량은 같다. 즉,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ 가 성립하므로 하중 분배비  $\lambda_i$ 는 식 (15)와 같이 유도할 수 있다.

$$\lambda_1 = \frac{F_1}{F} = \frac{k_{eq1}}{k_{eq1} + k_{eq2}} \tag{15}$$

$$\lambda_2 = \frac{F_2}{F} = \frac{k_{eq2}}{k_{eq1} + k_{eq2}}$$

즉, 등가 강성이 큰 치쌍이 더 많은 하중을 부담하게 되며, 이로 인해 두 접촉점의 실제 변형량과 하중 분배는 시간에 따라 비선형적으로 변하게 된다.

두 치쌍이 접촉하는 구간에서는 하중 분배비에 따라 각 치쌍에 가해지는 접촉력으로 식 (10)을 통해 회전각도를 재계산하고, 마찬가지로 식 (13)의 비선형 헤르츠 접촉 강성도 다시 계산한다. 따라서 각 치쌍의 등가 물림 강성은 식 (16)과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{k_{eq, i}} = \frac{1}{k_p[F_i]} + \frac{1}{k_g[F_i]} + \frac{1}{k_n[F_i]} \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

두 쌍의 치가 맞물리는 경우, 전체 물림 강성은 각 쌍에서의 등가 물림 강성의 병렬 합으로 생각할 수 있다.

$$k_{eq} = k_{eq, 1} + k_{eq, 2} \tag{17}$$

일반적인 스피어 기어는 한 쌍 또는 두 쌍의 접촉 구간을 갖고, 평균 접촉 쌍의 개수를 접촉율(contact ratio)로 정의한다. 이는 피니언과 기어의 설계 파라미터에 의해 결정된다. IPEM 기법은 접촉 변형에 의한 회전 각도를 보정하지만, 이 변형으로 인한 초기 접촉 또는 지연 접촉을 고려할 경우 계산의 비선형성이 급격하게 커지고, 보정되는 각도가 1° 미만으로 미미한 수준이라고 판단해 이 부분은 배제하였다.

#### 4. 모델 검증 및 비교 분석

##### 4.1 플라스틱 기어에 대한 물림 강성 비교

이 논문에서 제안한 개선된 잠재 에너지법의 유효

성을 검증하기 위해, 동일한 기어 조건에서 기존 방법들과의 비교를 수행하였다. 검증 대상은 Table 3에 제시된 파라미터를 갖는 스피어 기어이며, 나일론 재질 (PA66)에 치형 수정이 없는 일반 인벌루트 기어로 가정하였다. 기어 재질의 탄성계수( $E$ )와 푸아송비( $\nu$ )는 모든 방법에서 동일하게 적용하였으며, 치의 두께 ( $W$ )와 토크 하중 ( $T$ ) 또한 공통으로 사용하였다.

비교 대상에는 잠재 에너지법(PEM), ISO 6336에 기반한 방법<sup>9)</sup>, 그리고 이 연구에서 제안한 개선된 잠재 에너지법(IPEM)이 포함된다. 선행 연구들에서는 일반적으로 유한요소 해석(FEM) 또는 실험을 통해 산출된 물림 강성을 기준값으로 사용하며<sup>(5,10-13)</sup>, 특히 플라스틱 기어의 경우에는 실험적으로 물림 강성을 정밀하게 측정하는 연구가 매우 제한적인 것으로 알려져 있다.

이에 이 연구에서는 플라스틱 기어에 대해 실험 기반 참조 데이터가 부족하다는 점을 감안하여, 상용 소프트웨어인 Ansys를 이용한 유한요소 해석 결과를 기준 물림 강성으로 사용하였다. 해석 모델은 인벌루트 치형, 재질 특성, 접촉 조건 등을 선행 연구와 동일한 수준으로 설정하였으며<sup>(5,11,13)</sup>, 요소 크기와 시간 증분에 따른 물림 강성 변화가 충분히 작은 범위에서 해석을 진행하였다. 이러한 조건에서 얻은 FEM 결과는 이 연구에서 다루는 정적 하중 영역에서는 가장 신뢰도 높은 수치 참조값으로 간주할 수 있으며, 이를 통해 제안 기법과 기존 기법의 상대적 예측 정확도를 평가하였다.

Fig. 5는 한 물림 주기에 대한 등가 물림 강성을 나타낸다. 초기 구간은 두 쌍이 동시에 접촉하는 더블

Table 3 Parameters of a spur gear set

	Symbol	Value
Module [mm]	$m$	3
Number of teeth	$z_p, z_g$	20
Pressure angle [°]	$\alpha_0$	20
Moment of inertia [kgm <sup>2</sup> ]	$J_p, J_g$	$3.4 \times 10^{-5}$
Face width [mm]	$W$	20
Young's modulus [Pa]	$E_p, E_g$	$1.9 \times 10^9$
Poisson's ratio	$\nu_p, \nu_g$	0.35
Load torque [Nm]	$T$	100

(double) 접촉 구간이며, 이후에 하나의 쌍만 접촉하는 싱글(single) 접촉 구간으로 변화한다. 각 구간에서의 평균 물림 강성의 오차를 계산하면 Table 4와 같다. ISO 표준에 의한 방법은 싱글 접촉 구간에서 FEM 대비 약 58.4%, 더블 접촉 구간에서 15.3%의 과대평가를 보였다. PEM은 FEM과의 상대 오차가 싱글 구간 11.7%, 더블 구간 4.7%로 나타나 ISO 표준보다는 개선된 결과를 보이지만, 여전히 오차가 존재한다. 반면 IPEM은 싱글 및 더블 접촉 구간에서의 평균 물림 강성이 FEM 결과와 각각 1.6%, 1.9% 이내의 오차로 가장 높은 일치도를 보였다.

또한 각 방법의 계산 효율성을 비교하기 위해 동일한 개인용 컴퓨터(Intel i7 CPU, 16 GB RAM)에서 물림 강성 계산에 소요되는 시간을 측정하였다. FEM 해석의 경우 한 물림 주기에 대한 강성 곡선을 얻기까지 약 7분 20초(≈440 s)가 필요했던 반면, 제안된 IPEM은 동일 조건에서 약 9초 수준으로 계산이 완료되었다. 즉, 순수 계산 시간만 기준으로 할 때 제안된 방법은 FEM 대비 약 50배 정도 빠른 것으로 나타났다.

다. 실제 해석 과정에서는 FEM 모델링, 메쉬 생성, 접촉 조건 설정 등 전처리 시간이 추가로 요구되므로, IPEM이 제공하는 시간 절감 효과는 이보다 더 크게 나타날 것으로 판단된다.

4.2 하중에 따른 강성 변화

기어에 작용하는 토크가 증가하면 치간 접촉력 또한 증가하게 되며, 이에 따라 실제 기어의 물림 강성은 하중에 따라 비선형적으로 변화한다. 그러나 기존의 잠재 에너지법은 치의 하중 변화에 따른 변형을 고려하지 않기 때문에, 하중과 무관하게 동일한 물림 강성을 산출하는 한계가 있다.

제안된 기법이 이러한 하중 의존성을 적절히 반영하는지 확인하기 위해, 50 Nm, 100 Nm, 150 Nm, 200 Nm 네 가지의 토크 조건에서 물림 강성을 계산하여 Fig. 6과 같이 비교하였다. 그 결과, 기존 잠재 에너지법은 하중 변화와 관계없이 일정한 강성 값을 나타낸 반면, 제안된 기법은 하중 증가에 따라 비선형적으로 변화하는 물림 강성을 도출하여 실제 거동을 보다 잘 반영함을 확인할 수 있었다.

4.3 동적 모델링 및 시뮬레이션 결과

4.1에서 얻은 물림 강성이 실제 기어의 동적 거동을 잘 나타내는지 확인하기 위해, 스퍼 기어의 동적 모델(dynamic model)을 통해 동적 전달 오차(dynamic transmission error, DTE)를 확인하였다. 동적 모델은 Fig. 7과 같이 축은 단단히 고정되어 있다

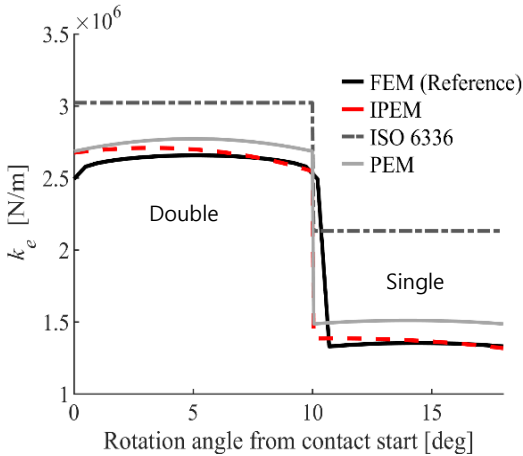


Fig. 5 Calculation result of mesh stiffness

Table 4 Average mesh stiffness and error

	State	FEM	IPEM	ISO	PEM
Mesh stiffness (× 10 <sup>6</sup> Nm)	Single	1.346	1.367	2.132	1.503
	Double	2.620	2.670	3.022	2.744
Error [%]	Single	-	1.56	58.43	11.68
	Double	-	1.91	15.33	4.73

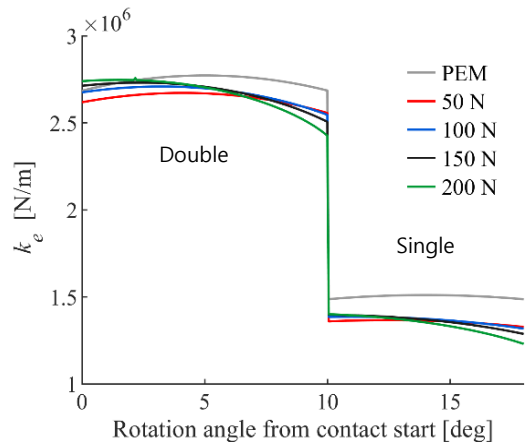


Fig. 6 Mesh stiffness under different applied loads

고 가정하고 2자유도로 구성하였다. 동적 모델의 운동방정식은 식 (18)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} J_p \ddot{\theta}_p = T_0 - F_m r_p \\ J_g \ddot{\theta}_g = F_m r_g - T_L \end{cases} \quad (18)$$

이때 동적 전달 오차는 식 (19)와 같이 정의되고, 접촉력  $F_m$ 은 물림 강성과 전달 오차의 곱에 감쇠 항을 더한 값으로 식(20)과 같이 정의된다.

$$DTE = r_p \theta_p - r_g \theta_g \quad (19)$$

$$F_m = k_e (r_p \theta_p - r_g \theta_g) + c_e (r_p \dot{\theta}_p - r_g \dot{\theta}_g) \quad (20)$$

등가 강성  $C_e$ 는 전 구간에서 일정하다고 가정하고 식 (21)과 같은 값을 사용한다. 이때  $\xi$ 는 감쇠율,  $m_e =$

$J_p J_g / (J_p r_g^2 + J_g r_p^2)$ 는 등가 질량,  $\bar{k}_e$ 는 등가 강성의 평균값이다.

$$c_e = 2\xi \sqrt{m_e \bar{k}_e} \quad (21)$$

구동 하중 토크 100 Nm, 구동 속도 300 r/min 조건에서 동적 모델의 시뮬레이션을 수행하였다. 기어 맞물림 주파수(gear mesh frequency, GMF)는 회전 주파수와 기어 치의 개수 곱으로 정의되는데, 해당 조건에서 GMF는 100 Hz, 즉 치물림 주기는 0.01초이다. 정상 상태에서의 3주기 응답을 분석한 결과, 동적 전달 오차는 Fig. 8, 치의 접촉력은 Fig. 9와 같이 나타났다.

Fig. 8과 Fig. 9에서 확인할 수 있듯이, ISO 표준 기반 기법은 동적 전달 오차를 과소평가하며 실제 접촉력의 변동 특성을 충분히 반영하지 못하였다. 반면

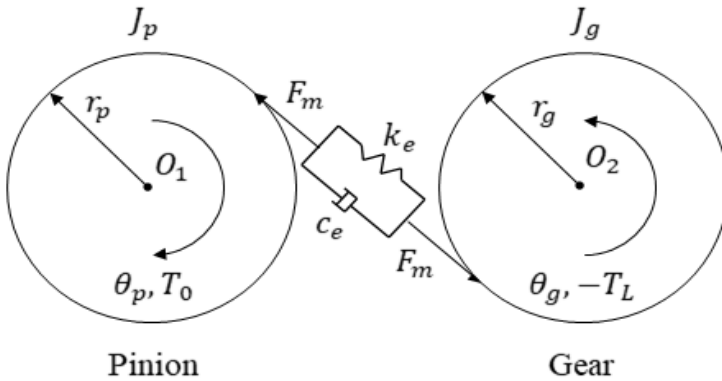


Fig. 7 Dynamic model of two-stage spur gear

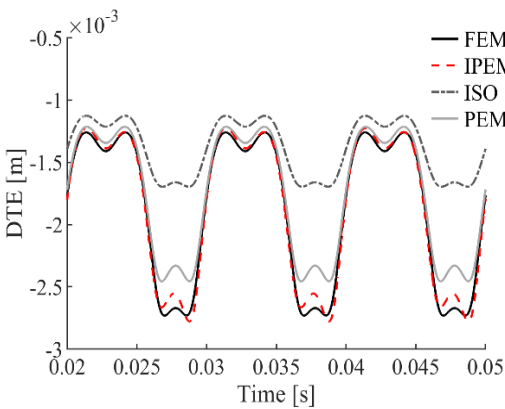


Fig. 8 Simulation result of dynamic transmission error

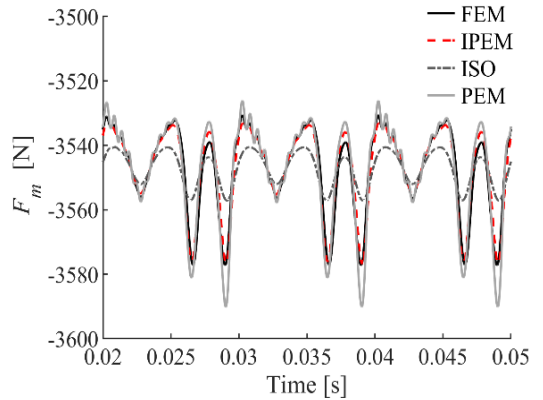


Fig. 9 Simulation result of meshing force

제안된 기법은 FEM을 통해 얻은 응답과 높은 일치도를 보이며 기어 시스템의 동특성을 정확하게 예측하는 것으로 나타났다. 한편 기존 잠재 에너지법은 전체적인 추세는 다르지만, 싱글 접촉 구간에서 비교적 큰 오차가 발생하였다. 싱글 접촉 구간에서는 하나의 치 쌍에 모든 하중이 집중됨에 따라 접촉면의 변형이 더욱 크게 나타나는데, 이러한 하중 의존 특성을 반영하지 못하는 기존 잠재 에너지법의 구조적 한계가 원인으로 판단된다. 이상의 결과를 종합하면, 제안된 기법은 하중 의존적 물림 강성을 효과적으로 산출하며 기존 기법 대비 우수한 기어 동특성 예측 성능을 보임을 확인할 수 있었다.

## 5. 결 론

이 연구에서는 기존 잠재 에너지법의 한계를 보완하기 위해, 기어 치의 탄성 변형 및 접촉 위치 변화를 고려한 개선된 잠재 에너지 기반 물림 강성 산출 기법을 제안하였다. 제안된 방법은 각 기어의 변형 강성비를 통해 탄성 접근 거동을 분리하고, 하중 크기에 따라 변화하는 비선형 접촉 강성을 반복적으로 갱신함으로써 보다 실제 거동에 근접한 물림 강성을 도출할 수 있다.

기존 잠재 에너지법, ISO 6336 기반 기법, 그리고 유한요소 해석을 통한 물림 강성과 비교한 결과, 제안된 기법은 하중 변화에 따른 비선형 물림 강성의 거동을 효과적으로 재현하며 기존 방법의 예측 성능을 개선하였다. 또한 동적 모델에 적용한 결과에서도 동적 전달 오차와 치 접촉력이 FEM 결과와 높은 일치도를 보이며, 기어 구동계의 동특성을 효과적으로 예측함을 확인하였다.

한편, 이 연구는 정적 및 준정적 하중 조건에서의 탄성 기반 거동을 중심으로 모델을 구성하였다. 이는 이 연구에서 활용한 FEM 기준값 및 검증 조건이 모두 상대적으로 저온 저속 환경, 즉 점탄성 영향이 지배적이지 않은 영역에 해당하기 때문에 타당한 접근이다. 그러나 실제 플라스틱 기어는 작동 온도, 높은 회전 속도 등에 따라 점탄성(viscoelastic) 특성이 두드러지게 나타나며, 이러한 시간 의존적 변형은 물림 각도, 하중 분배, 국부 침투 깊이 등 여러 요소에 복합적인 영향을 미칠 수 있다.

따라서 이 연구의 방법론은 플라스틱 기어의 하중-의존 탄성 거동을 정밀하게 반영하지만, 장시간 작동 또는

고온 고속 조건에서의 점탄성 영향까지 고려하기 위해서는 모델 확장이 필요하다. 향후 연구에서는 프로니 시리즈(Prony series) 기반의 점탄성 재료 모델을 접목하거나, 온도, 속도 의존형 물성치를 적용한 하중 반복(iterative) 물림 강성 계산 절차를 통합함으로써 제안된 기법을 실제 환경에 보다 폭넓게 적용할 수 있을 것이다. 이러한 확장은 실제 플라스틱 기어 시스템의 설계, 진동 및 동특성 해석 측면에서 중요한 진전이 될 것으로 기대된다.

## 후 기

이 연구는 서울대학교 공학연구원, 교육부 및 한국연구재단의 4단계 두뇌한국21 사업(4단계 BK21 사업)의 지원을 통해 진행되었으며, 한국소음진동공학회 2024년 추계 소음진동공학회 학술대회에서 발표한 내용을 토대로 작성되었다.

## References

- (1) Cho, Y. S. and Choi, Y. S., 2002, Nonlinear Dynamic Characteristics of Gear Driving Systems with Periodic Meshing Stiffness Variation and Backlash, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 12, No. 12, pp. 921~928.
- (2) Yang, D. C. H. and Lin, J. Y., 1987, Hertzian Damping, Tooth Friction and Bending Elasticity in Gear Impact Dynamics, Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design, Vol. 109, pp. 189~196.
- (3) Tian, X., Zuo, M. J. and Fyfe, K., 2004, Analysis of the Vibration Response of a Gearbox with Gear Tooth Faults, Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, pp. 785~793.
- (4) Sainsot, P., Velex, P. and Duverger, O., 2004, Contribution of Gear Body to Tooth Deflections - A New Bidimensional Analytical Formula, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, No. 4, pp. 748~752.
- (5) Wan, Z., Cao, H., Zi, Y., He, W. and He, Z., 2014, An Improved Time-varying Mesh Stiffness Algorithm and Dynamic Modeling of Gear-rotor System with Tooth Root Crack, Engineering Failure Analysis, Vol. 42, pp. 157~177.

(6) Chen, Z. and Shao, Y., 2011, Dynamic Simulation of Spur Gear with Tooth Root Crack Propagating along Tooth Width and Crack Depth, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 18, No. 8, pp. 2149~2164.

(7) Umezawa, K., Sato, T. and Ishikawa, J., 1984, Simulation of Rotational Vibration of Spur Gears, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 27, No. 223, pp. 102~109.

(8) Cai, Y. and Hayashi, T., 1994, The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears: Theory and Experiment, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 2, pp. 558~564.

(9) International Organization for Standardization, 2006, Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears - Part 1: Basic Principles, Introduction and General Influence Factors, ISO, ISO 6336-1:2006, Geneva, Switzerland.

(10) Meuleman, P. K., Walton, D., Dearn, K. D., Weale, D. J. and Driessen, I., 2007, Minimization of Transmission Errors in Highly Loaded Plastic Gear Trains, *Proceedings of the Institution of Mechanical*

*Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 221, No. 10, pp. 1117~1128.

(11) Liu, M., Song, Y., Han, X., Hu, J. and Yan, C., 2024, Compensation Modification of Plastic Gear Tooth Profile Considering Meshing Deformation, *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 19, 273687042.

(12) Cao, Z., Chen, Z. and Jiang, H., 2020, Nonlinear Dynamics of a Spur Gear Pair with Force-dependent Mesh Stiffness, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 99, pp. 1227~1241.

(13) Xu, Z., Yu, W. and Yimin, S., 2021, A Refined Analytical Model for the Mesh Stiffness Calculation of Plastic Gear Pairs, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 98, pp. 71~89.

(14) Muskhelishvili, N. I., 1977, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany.

(15) Weber, C., 1949, *The Deformations of Loaded Gears and the Effect on Their Load-carrying Capacity*, British Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research Report No. 3, London, United Kingdom.