

Reaction-diffusion Pattern 기반 자기조직화 Phononic Medium의 분산 비등방성 분석

Morphology-induced Dispersion Anisotropy in Self-organized Phononic Media Derived from Reaction-diffusion Patterns

박 충 일[†] · 김 재 우^{*} · 정 하 영^{*}

Chung Il Park[†], Jaewoo Kim^{*} and Ha Young Jeong^{*}

(Received March 19, 2026 ; Revised April 20, 2026 ; Accepted April 20, 2026)

Key Words : Reaction-diffusion Pattern(반응확산 패턴), Self-organized Phononic Medium(자기조직화 포노닉 매질), Dispersion Anisotropy(분산 비등방성), Equal-frequency Contour(등주파수 곡선)

ABSTRACT

In this study, the morphology-induced dispersion anisotropy is examined in self-organized phononic media generated from reaction-diffusion (RD) patterns. Two-dimensional patterns are produced using the Gray-Scott model, and their characteristic wavelength and directional features are quantified by spatial Fourier analysis. These patterns are mapped onto spatially varying material-property fields, and wave-dispersion characteristics are computed using a scalar plane wave expansion method. Rather than focusing solely on complete bandgap formation, the manner in which characteristic length scales and morphological anisotropy influence band dispersion, equal-frequency contours, and group-velocity directionality is examined herein. Results show that RD patterns induce pronounced anisotropic dispersion even without a complete bandgap. The temporal evolution of morphology leads to systematic changes in interface density, dominant wavelength, and spectral anisotropy, accompanied by stage-dependent variations in low-order dispersion branches. Although the global linear correlation between morphology anisotropy and dispersion anisotropy is weak in the present scalar-wave setting, the results indicate that RD-derived patterns can serve as a useful self-organized platform for exploring directional dispersion tailoring beyond conventional lattice-based metamaterials.

1. 서 론

메타물질 및 phononic crystal은 구조적 설계를 통하여 자연계에서 쉽게 구현하기 어려운 파동 전파 특성을 유도할 수 있는 인공 매질로 널리 연구되어 왔다^(1~3). 특히 초기 phononic crystal 연구들은 주기적

탄성 복합재에서의 완전 또는 부분 밴드갭 형성 메커니즘을 규명하고, 특정 주파수 영역에서 파동 전파를 억제하거나 차단하는 데 초점을 두었다^(1,2). 그러나 최근에는 밴드갭 자체뿐 아니라 분산관계의 형상, equal-frequency contour(EFC)의 곡률, 그리고 group velocity의 방향성이 self-collimation, beam steering, flat lensing, route reconfiguration, phase control과

[†] Corresponding Author ; Member, Kangwon National University, Professor

E-mail : cipark@kangwon.ac.kr

^{*} Kangwon National University, Student

[‡] Recommended by Editor Seong Yong Wie

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

같은 방향성 파동 제어 기능과 직접적으로 연결되다는 점이 강조되고 있다^(3~10).

기존의 phononic 구조 설계는 대체로 정사각형 또는 육각형과 같은 규칙 격자를 기반으로 진행되어 왔다^(1,2,6,7). 이러한 접근은 단위셀 정의가 명확하고 해석이 용이하다는 장점이 있으나, 생성 가능한 구조 형상의 다양성이 제한된다는 한계를 가진다. 이에 비해 reaction-diffusion(RD) 시스템은 비평형 반응과 확산의 상호작용을 통해 점상, 줄무늬형, 미로형 등 다양한 자기조직화 패턴을 자발적으로 형성할 수 있으며, 이러한 패턴은 새로운 메타매질 형상 생성의 대안적 설계 템플릿으로 활용될 수 있다⁽¹¹⁾. 또한 장거리 완전주기성이 없더라도 hyperuniform disorder 또는 hidden order와 같은 국소 상관 구조가 phononic band structure와 localization 특성을 크게 변화시킬 수 있음이 보고되면서, 비정규-자기조직화 패턴 기반 구조에 대한 관심도 증가하고 있다^(12,13).

국내에서도 Helmholtz resonator 기반 음향 메타물질의 파동 전파 특성 분석과 구멍 뚫린 강체 판의 차음 성능 향상을 위한 음향 메타물질 설계 등, 파동 제어 관점의 관련 연구가 지속적으로 수행되어 왔다^(14,15).

특히, RD 패턴은 단순한 시각적 형상을 넘어서 특성 파장, 공간 연결성, 방향성, 무질서도 등의 형태학적 정보를 내포하고 있다^(11~13). 이러한 정보는 파동 산란과 위상 추적, 그리고 분산 특성의 방향 의존성에 직접적인 영향을 줄 수 있으므로, 단순한 기하학적 스펙트럼 분석을 넘어 실제 파동 응답과 연계된 해석이 필요하다^(3~10). 이 연구의 계산 결과에서도 특정 RD 패턴은 완전한 밴드갭을 형성하지 않더라도, 저차 밴드의 분산관계와 EFC 형상을 비등방적으로 변화시키며 방향성 파동 전파 가능성을 보여주었다.

따라서, 이 연구에서는 Gray-Scott RD 모델을 이용하여 2차원 자기조직화 패턴을 생성하고, 이를 공간적으로 변화하는 물성장으로 매핑하여 자기조직화 phononic medium을 구성하였다. 이후 spatial Fourier transform을 통해 패턴의 특성 파장과 형태학적 방향성을 정량화하고, plane wave expansion(PWE) 기법을 이용하여 scalar-wave 기반 밴드 구조와 분산 특성을 계산하였다. 특히 이 연구의 목적은 RD 패턴의 형태학적 비등방성이 분산 비등방성, EFC 변형, 그리고 group velocity 방향성과 어떠한 상관관계를 갖는지를 규명하는 데 있다. 이를 통해 이 연구는 밴드갭

중심의 전통적 해석을 넘어, 자기조직화 패턴을 이용한 방향성 파동 제어 매질 설계 가능성을 제시하고자 한다.

2. 해석방법

2.1 Reaction-diffusion Pattern 생성

이 연구에서는 Gray-Scott reaction-diffusion 모델을 사용하여 2차원 공간 패턴을 생성하였다. 지배방정식은 식 (1a), 식 (1b)와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D_u \nabla^2 U - UV^2 + F(1 - U) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D_v \nabla^2 V - UV^2 - (F + k)V \quad (1b)$$

여기서, U 와 V 는 각각 두 화학종의 농도장을 의미하며, D_u 와 D_v 는 확산계수, F 는 공급률, k 는 제거율이다. 이 연구에서는 $D_u = 0.16$, $D_v = 0.08$, $F = 0.06$, $k = 0.062$ 를 사용하였다. 계산 영역은 $128 \times 128 \times 128$ 의 2차원 주기 경계조건 격자로 설정하였고, $\Delta x = \Delta z = 1$, $\Delta t = 1$ 의 explicit time integration을 적용하였다. 초기조건은 중심부의 국소 사각 섭동과 미소 무작위 잡음(noise level = 0.01)을 포함하도록 설정하였으며, 재현 가능성을 위해 random seed는 1로 고정하였다. 총 25 000 step 동안 계산을 수행하고, 500 step 간격으로 snapshot을 저장하여 패턴 진화 과정을 분석하였다.

2.2 Pattern Descriptor 정의

생성된 RD 패턴의 형태학적 특성을 정량화하기 위하여 spatial Fourier transform을 수행하였다. FFT 스펙트럼으로부터 다음 지표를 정의하였다.

첫째, dominant wavelength λ_{RD} 는 DC 성분을 제외한 최대 spectral peak에 대응하는 파수 k_{dom} 을 이용하여 식 (2)와 같이 정의하였다.

$$\lambda_{RD} = \frac{2\pi}{k_{dom}} \quad (2)$$

둘째, pattern anisotropy는 FFT 에너지 분포의 2차 모멘트 텐서로부터 계산하였다. 스펙트럼의 공분산 행렬 고유값을 λ_1 , λ_2 라 할 때, spectral anisotropy는 식 (3)과 같이 정의하였다.

$$A_{\text{spec}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (3)$$

이 값이 0에 가까울수록 등방적이며, 값이 증가할수록 특정 방향으로 편향된 패턴임을 의미한다.

셋째, interface density는 패턴 경계 길이의 상대적 양을 나타내는 지표로 정의하였으며, 시간에 따른 패턴 복잡도의 증가 및 포화 거동을 추적하는 데 사용하였다.

2.3 물성장 매핑 및 파동 해석 모델

RD 패턴은 정규화 과정을 거친 후 공간적으로 변화하는 물성장으로 매핑하였다. 이 연구에서는 패턴장 $\phi(\mathbf{x})$ 를 이용하여 강성장 $C(\mathbf{x})$ 및 밀도장 $\rho(\mathbf{x})$ 를 식 (4a), 식 (4b)와 같이 정의하였다.

$$C(\mathbf{x}) = C_{\min} + (C_{\max} - C_{\min})\phi(\mathbf{x}) \quad (4a)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min})\phi(\mathbf{x}) \quad (4b)$$

파동 해석은 식 (5)와 같은 scalar-wave 지배방정식에 기반하였다.

$$\nabla \cdot (C(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}) + \omega^2 \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{u}$ 는 스칼라 변위장, ω 는 각진동수이다. 이 연구에서는 RD 패턴을 정규화한 연속장 $\phi(\mathbf{x})$ 를 이용하여 $C(\mathbf{x}) \in [C_{\min}, C_{\max}]$, $\rho(\mathbf{x}) \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ 의 공간적으로 변화하는 물성장으로 매핑하였다. 이 계산에서 사용한 값은 $C_{\min} = 1$, $C_{\max} = 5$, $\rho_{\min} = 1$, $\rho_{\max} = 3$ 이며, 이는 morphology-dispersion relationship을 탐색하기 위한 dimensionless surrogate field로 해석하였다. 또한 이 scalar-wave 모델은 2차원 이질 매질에서의 reduced-order dispersion model로서 패턴 형상과 분산 응답 간의 1차적 연관성을 분석하는 데 목적이 있다. 따라서 실제 탄성 포노닉 시스템에서 중요한 longitudinal/transverse mode coupling이나 polarization conversion은 포함하지 않으며, 이 결과의 해석 범위는 이러한 한계 내에서 이해되어야 한다. 밴드 구조 계산에는 주기 경계조건하의 plane wave expansion(PWE) 기법을 적용하였다.

2.4 Dispersion Anisotropy 지표 정의

분산 비등방성을 정량화하기 위해 Γ 점 근방의 원형 k -cut을 따라 각도 θ 별 밴드 주파수 $f_n(k_0, \theta)$ 를

계산하였다. 특정 반지름 k_0 에서의 주파수 비등방성은 식 (6)과 같이 정의하였다.

$$A_f^{(n)}(k_0) = \frac{\max_{\theta} f_n(k_0, \theta) - \min_{\theta} f_n(k_0, \theta)}{f_n(k_0, \theta)} \quad (6)$$

또한, 각 방향에서의 group velocity 크기 $|v_g|$ 를 사용하여 식 (7)과 같이 group-velocity anisotropy를 정의하였다.

$$A_{v_g}^{(n)}(f_0) = \frac{\max_{\theta} |v_g(f_0, \theta)| - \min_{\theta} |v_g(f_0, \theta)|}{|v_g(f_0, \theta)|} \quad (7)$$

추가적으로 EFC의 형상을 타원으로 근사하고, 장축과 단축을 각각 a , b 라 할 때 eccentricity를 식 (8)과 같이 정의하였다.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (8)$$

$e = 0$ 은 원형 EFC를 의미하며, e 가 증가할수록 분산 특성의 방향성이 강해짐을 나타낸다.

3. 결과 및 고찰

3.1 RD Pattern의 진화와 형태학적 지표 변화

Fig. 1은 RD 과정에서 선택된 대표 형상과 이들의 spatial Fourier spectrum을 보여준다. 초기 단계(step 1)에서는 중심부 국소 구조가 지배적이며, 이에 대응하는 FFT는 초기 정사각 섭동의 영향을 반영하는 축방향 성분을 나타낸다. 반면 중간 단계(step 5000)에서는 꽃무늬형의 방향성 패턴이 형성되며, 이 경우 spectral anisotropy가 가장 크게 나타난다.

후기 단계(step 25000)에서는 미로형 연결 구조가 형성되며, 중간 단계에 비해 방향성은 감소하지만 여전히 유한한 형태학적 비등방성이 유지된다. 다만 Fig. 1 하단의 FFT는 전 영역 스펙트럼을 기반으로 한 global representation이므로, 실공간에서 시각적으로 두드러지는 국소 방향성이 존재하더라도 여러 방향 성분이 동시에 분포하는 경우 전체 스펙트럼은 비교적 약한 비등방성만을 나타낼 수 있다. 이 지표는 전 영역 FFT 에너지 분포의 2차 모멘트에 기반한 global descriptor이므로, 실공간에서 국소적으로 관찰

되는 방향성이나 연결 구조가 존재하더라도 전체 스펙트럼이 여러 방향 성분을 동시에 포함하는 경우 절대값은 상대적으로 작게 나타날 수 있다.

이와 같은 진화는 Fig. 2의 정량 지표에서도 확인된다. Fig. 2(a)에서 dominant wavelength λ_{RD} 는 초기 과도 구간에서 큰 변동을 보인 뒤, 약 10^4 step 이후에는 거의 일정한 값으로 수렴한다. 이는 reaction-diffusion 시스템이 자발적으로 대표 길이척도를 선택하는 wavelength selection 과정을 거침을 의미한다. 또한 Fig. 2(b)에서 interface density는 초기 증가 후 약 0.11 수준에서 포화되며, 이는 패턴 경계의 생성이 일정 시점 이후 거의 완료됨을 보여준다. 한편 Fig. 2(c)의 spectral anisotropy는 중간 단계에서 최대값을 가지며, 이후 다소 감소한 뒤 비교적 일정한 수준을 유지한다. 따라서 이 시스템에서는 형태학적 방향성이 시간 전 구간에서 단조롭게 증가하는 것이 아니라, 패턴 형성의 중간 단계에서 가장 크게 나타나는 과도적 특성임을 알 수 있다.

3.2 밴드 구조와 Angular Dispersion Near Γ

대표 snapshot에 대한 scalar-wave band structure와 Γ 점 근방 angular dispersion 결과를 Fig. 3에 나타

내었다. 상단의 band structure를 보면 현재의 물성 대비 및 scalar-wave 조건에서는 전 구간에 걸쳐 뚜렷한 complete bandgap이 형성되지는 않는다. 그러나 저차 밴드의 곡률과 분지 형태는 패턴 형상에 따라 분명한 차이를 보인다.

보다 직접적인 분산 비등방성은 Fig. 3 하단의 angular dispersion에서 확인된다. 초기 단계와 후기 단계에서는 선택된 k -반경에서 주파수의 각도 의존성이 매우 작아 $A_f \approx 0$ 에 가까운 값을 나타낸다. 반면 중간 단계(step 5000)에서는 동일한 k/k_{BZ} 조건에서 $A_f = 0.01$ 의 유한한 비등방성이 관찰된다. 이는 전체 bandgap의 형성과는 별개로, RD 패턴의 형태학적 차이가 저차 분산 가지의 near- Γ angular response에 measurable but moderate한 변화를 유도할 수 있음을 의미한다. 따라서 이 결과는 강한 방향성 제어의 직접 입증이라기보다, 자기조직화 형상 변화가 분산 응답의 방향 의존성에 영향을 줄 수 있음을 보여주는 정량적 지표로 해석하는 것이 적절하다.

3.3 EFC와 Group Velocity Directionality

Fig. 4는 대표 세 경우에 대한 equal-frequency contour(EFC)와, 선택된 저차 분지에서 동일 목표 주파

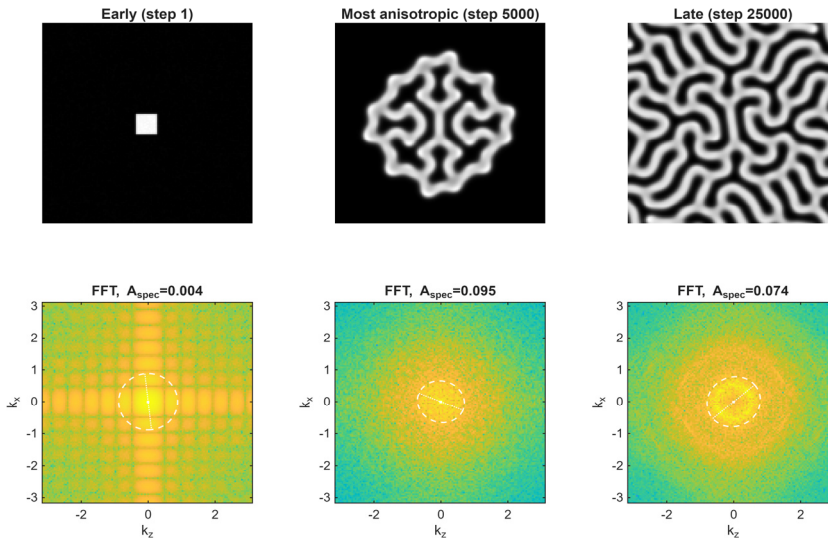


Fig. 1 Representative reaction-diffusion-derived morphologies and their spatial Fourier spectra. Top row: spatial patterns at the early, intermediate, and late stages of the reaction-diffusion evolution. Bottom row: corresponding log-scaled FFT amplitude maps. The intermediate pattern exhibits the strongest directional bias in the global spectral distribution, although the absolute anisotropy remains moderate because multiple directional components coexist in the full-domain FFT

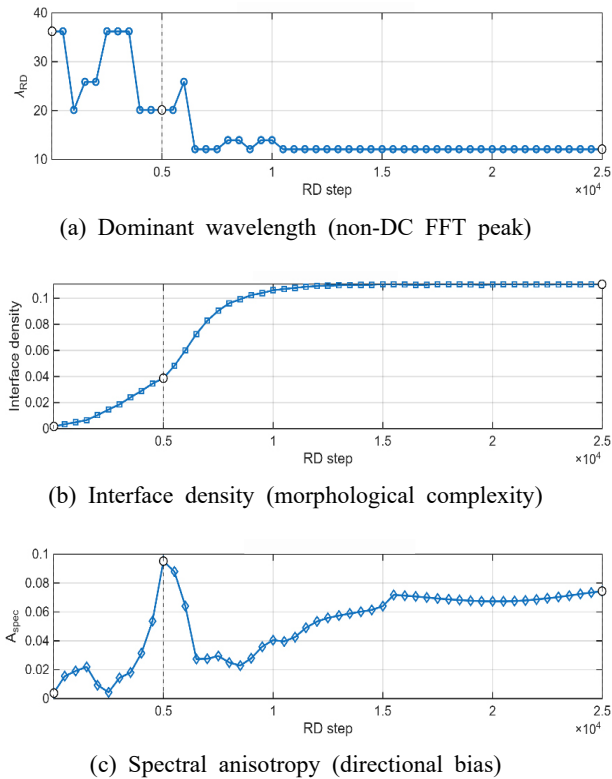


Fig. 2 Temporal evolution of the pattern descriptors during the reaction–diffusion process

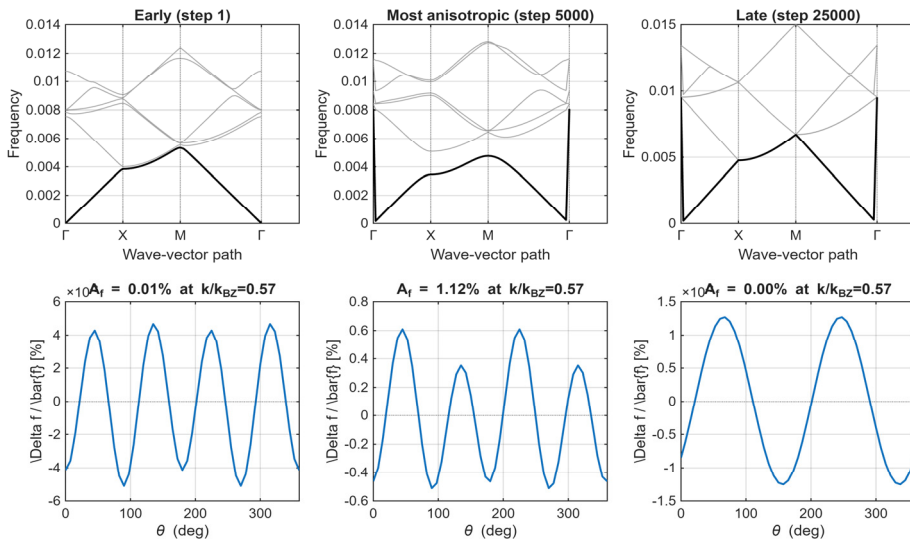


Fig. 3 Band structures and angular dispersion of representative RD-derived phononic media. Top row: scalar-wave band structures for three representative morphologies. Bottom row: angular frequency variation of the selected low-order branch at a fixed wave-number radius near the Γ point. The intermediate morphology shows the strongest directional variation, indicating pronounced dispersion anisotropy

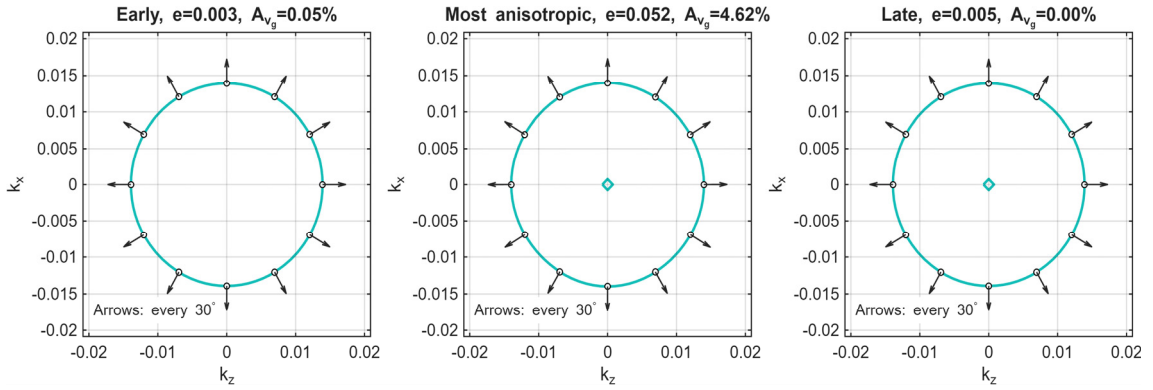


Fig. 4 Equal-frequency contours and group-velocity directions for representative RD-derived media. Equal-frequency contours are shown for the same target frequency on the selected low-order branch for the three representative morphologies. Arrows indicate the normalized group-velocity directions, $v_g = \nabla_{\mathbf{k}_w}$, sampled at fixed angular intervals along each contour. The intermediate morphology exhibits the largest contour distortion among the three cases, although the overall anisotropy remains moderate under the present scalar-wave setting

수에 대해 계산한 group-velocity 방향 $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$ 를 비교한 결과이다. 화살표는 EFC 상에서 고정 각도 간격으로 샘플링한 점들에 대해 정규화된 방향만을 표시하였다.

Fig. 4는 대표 세 경우에 대한 equal-frequency contour(EFC)와 group-velocity 방향을 비교한 결과이다. 초기 및 후기 단계에서는 EFC가 거의 원형에 가까우며, eccentricity 또한 각각 $e = 0.003$ 및 $e = 0.005$ 로 매우 작다. 이에 비해 중간 단계의 가장 비등방적인 패턴에서는 $e = 0.052$ 로 증가하며, EFC가 원형에서 벗어난 형태를 나타낸다. 이러한 contour distortion은 동일 주파수에서 허용되는 wave-vector 집합이 방향에 따라 달라짐을 의미하며, 이에 따라 group velocity 방향 역시 약하지만 분명한 방향 의존성을 가질 수 있음을 시사한다. 다만 현재 계산에서의 eccentricity 값은 전반적으로 크지 않으므로, 이 결과는 강한 beam steering의 직접 증명이라기보다 morphology-dependent dispersion distortion의 존재를 보여주는 사례로 해석하는 것이 더 적절하다. 즉, 현재 시스템은 강한 stop-band medium이라기보다, morphology-dependent anisotropic dispersive medium으로 해석하는 것이 더 적절하다. 특히 중간 단계의 패턴은 세 대표 형상 중 가장 큰 EFC 왜곡을 보이며, 이는 RD 패턴의 진화 과정 중 특정 형상 상태에서 방향성 분산 특성이 상대적으로 더 두드러질 수 있음을 보여준다.

3.4 Morphology Anisotropy와 Dispersion Anisotropy의 상관성

Fig. 5는 spectral anisotropy와 세 가지 분산 응답 지표 (A_f , A_{vg} , e) 사이의 상관관계를 나타낸다. 먼저 A_{spec} 과 A_f , A_{vg} 사이의 선형 상관은 각각 $R^2 = 0.006$ 및 $R^2 = 0.007$ 매우 약하게 나타났다. 이는 전역 형태학적 비등방성이 분산 비등방성으로 단순한 1:1 선형 방식으로 전달되지 않음을 의미한다. 한편 A_{spec} 과 EFC eccentricity 사이의 상관은 $R^2 = 0.071$ 로 다소 증가하지만, 여전히 강한 예측 관계로 해석하기에는 충분하지 않다.

따라서, 현재 결과는 형태학적 비등방성만으로 분산 비등방성을 일의적으로 예측할 수 있음을 보여주지 않는다. 오히려 이 결과는 단일 global morphology descriptor만으로는 dispersion response를 충분히 설명하기 어렵고, 패턴의 연결성, 국소 곡률 분포, 다중 길이척도와 같은 추가적인 구조 정보가 함께 고려될 필요가 있음을 시사한다. 다만 step 5000 부근의 중간 단계 패턴은 Fig. 1 ~ Fig. 4 전반에서 가장 큰 형태학적 방향성과 가장 뚜렷한 분산 왜곡을 동시에 보였으므로, RD 진화 과정의 특정 과도 상태에서 morphology anisotropy와 dispersion distortion이 동시에 두드러질 가능성은 확인할 수 있다.

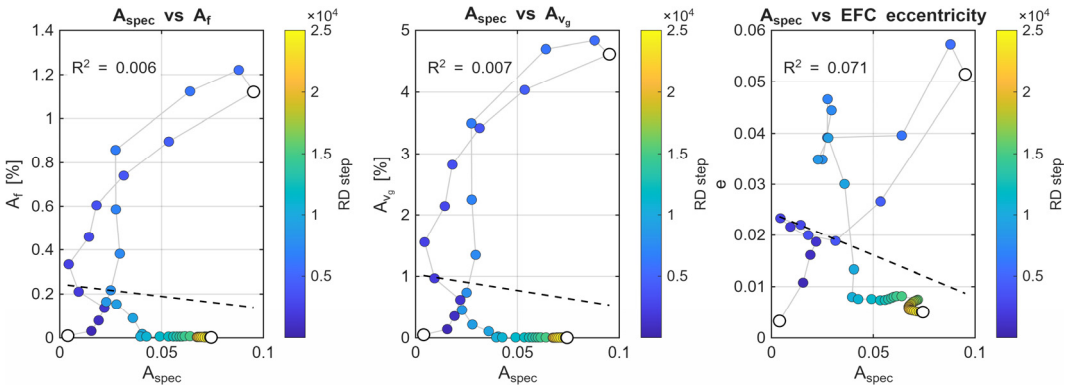


Fig. 5 Correlation between morphology anisotropy and dispersion anisotropy. Scatter plots comparing the spectral anisotropy A_{spec} with the band-frequency anisotropy A_f , the group-velocity anisotropy A_{vg} , and the EFC eccentricity e . The solid lines denote linear fits. Under the present scalar-wave setting, the global linear correlation is weak, indicating that a single morphology descriptor is insufficient to predict the dispersion response uniquely. The intermediate-stage pattern nevertheless coincides with the largest dispersion distortion among the representative cases

4. 결 론

이 연구에서는 reaction-diffusion 기반 자기조직화 패턴을 이용하여 scalar-wave phononic medium을 구성하고, 형태학적 특성과 분산 응답의 관계를 분석하였다. Gray-Scott RD 모델로 생성된 패턴은 시간에 따라 점상, 꽃무늬형, 미로형 등 다양한 자기조직화 형상으로 진화하였으며, dominant wavelength, interface density, spectral anisotropy를 통해 그 형상 변화를 정량화할 수 있었다. 특히 패턴 형성 과정에서 대표 길이척도가 선택되고, 형태학적 방향성이 중간 단계에서 가장 크게 나타나는 과도적 특성이 확인되었다. 파동 해석 결과, 현재의 scalar-wave 및 물성 대비 조건에서는 강한 complete bandgap이 지속적으로 형성되지는 않았으나, 저차 밴드의 분산관계와 equal-frequency contour는 RD 패턴의 형태학적 변화에 따라 뚜렷한 비등방적 변화를 나타내었다. 특히 중간 단계의 패턴에서는 angular dispersion의 변조와 EFC 왜곡이 가장 두드러지게 나타났으며, 이는 RD 패턴이 자기조직적으로 방향성 파동 전파 조건을 형성할 수 있음을 시사한다. 따라서 이 시스템은 전통적 의미의 강한 stop-band medium이라기보다, morphology-dependent anisotropic dispersive medium으로 해석하는 것이 더 적절하다.

한편, spectral anisotropy와 dispersion anisotropy 사이에는 강한 전역 선형 상관관계가 관찰되지는 않았다. 그러나 중간 단계의 과도 패턴에서 형태학적 비등방성과 분산 왜곡이 동시에 가장 크게 나타나, 두 특성 사이에 state-dependent coupling이 존재함을 확인하였다. 이는 RD 패턴의 방향성이 모든 경우에 일의적으로 파동 응답을 결정한다기보다, 특정 형상 상태에서 방향성 분산 특성이 더욱 뚜렷하게 발현될 수 있음을 의미한다. 종합하면, RD 패턴은 명시적 격자 설계 없이도 방향성 분산 특성을 유도할 수 있는 자기조직화 phononic medium의 생성 프레임워크로 해석될 수 있다. 향후에는 유한 슬랩 구조에서의 펄스 전파 해석, full elastic 모델 확장, 그리고 EFC 기반 steering angle 및 group-velocity directionality의 직접 검증을 통해, 자기조직화 패턴 기반 방향성 파동 제어 구조의 기능성을 보다 정밀하게 평가할 필요가 있다.

후 기

이 연구는 2025년도 강원대학교 교내연구비(신임교원 정착연구비)의 지원을 받아 수행되었다. 또한, 이 연구는 2026년도 교육부 및 강원특별자치도의 재원으로 강원RISE센터의 지원을 받아 수행된 지역혁신중심대학지원체계(RISE)의 결과이다(2026-RISE-10-002).

이 연구에서는 논문의 문장 표현 및 가독성 향상을 위해 AI 기반 도구를 활용하였다. 연구의 해석, 분석 및 결론은 모두 저자에 의해 수행되었다.

References

- (1) Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B., 1993, Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites, *Physical Review Letters*, Vol. 71, No. 13, pp. 2022~2025.
- (2) Kushwaha, M. S., Halevi, P., Martínez, G., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B., 1994, Theory of Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites, *Physical Review B Condensed Matter*, Vol. 49, No. 4, pp. 2313~2322.
- (3) Yang, S., Page, J. H., Liu, Z., Cowan, M. L., Chan, C. T. et al., 2004, Focusing of Sound in a 3D Phononic Crystal, *Physical Review Letters*, Vol. 93, No. 2, 024301.
- (4) Shi, J., Lin, S. C. S. and Huang, T. J., 2008, Wide-band Acoustic Collimating by Phononic Crystal Composites, *Applied Physics Letters*, Vol. 92, No. 11, 111901.
- (5) Sánchez-Morcillo, V. J., Staliunas, K., Espinosa, V., Pérez-Arjona, I., Redondo, J. and Soliveres, E., 2009, Propagation of Sound Beams Behind Sonic Crystals, *Physical Review B*, Vol. 80, No. 13, 134303.
- (6) Lin, S. C. S., Huang, T. J., Sun, J. H. and Wu, T. T., 2009, Gradient-index Phononic Crystals, *Physical Review B*, Vol. 79, No. 9, 094302.
- (7) Lin, S. C. S. and Huang, T. J., 2011, Tunable Phononic Crystals with Anisotropic Inclusions, *Physical Review B*, Vol. 83, No. 17, 174303.
- (8) Bringuier, S., Swinck, N., Vasseur, J. O., Robillard, J. F., Runge, K. et al., 2011, Phase-controlling Phononic Crystals: Realization of Acoustic Boolean Logic Gates, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 130, No. 4, pp. 1919~1925.
- (9) Dubois, M., Perchoux, J., Vanel, A., Tronche, C., Achaoui, Y. et al., 2019, Acoustic Flat Lensing Using an Indefinite Medium, *Physical Review B*, Vol. 99, 100301(R).
- (10) Tian, Z., Shen, C., Li, J., Reit, E., Bachman, H. et al., 2020, Dispersion Tuning and Route Reconfiguration of Acoustic Waves in Valley Topological Phononic Crystals, *Nature Communications*, Vol. 11, No. 1, 762.
- (11) Pearson, J. E., 1993, Complex Patterns in a Simple System, *Science*, Vol. 261, No. 5118, pp. 189~192.
- (12) Gkantounis, G., Amoah, T. and Florescu, M., 2017, Hyperuniform Disordered Phononic Structures, *Physical Review B*, Vol. 95, No. 9, 094120.
- (13) Roth, N. and Goodwin, A. L., 2023, Tuning Electronic and Phononic States with Hidden Order in Disordered Crystals, *Nature Communications*, Vol. 14, No. 1, 4328.
- (14) Kwon, B. J., Jo, C., Park, K. C. and Oh, I. K., 2013, Wave Propagation Characteristics of Acoustic Metamaterials with Helmholtz Resonators, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 23, No. 2, pp. 167~175.
- (15) Kim, M. and Lee, J. W., 2019, Design of Acoustic Metamaterial to Improve Sound Insulation Performance of a Holey Rigid Plate, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 29, No. 2, pp. 245~254.